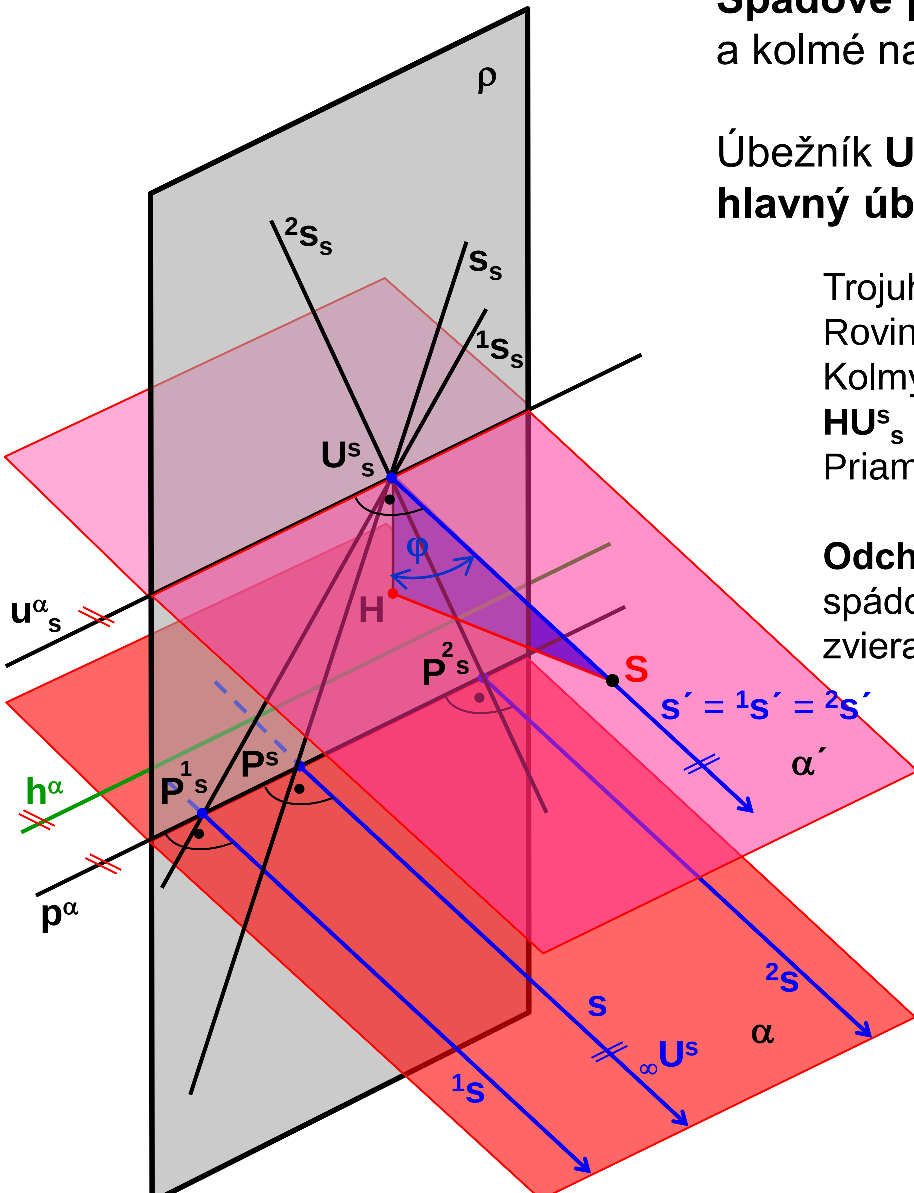
Kapitola S2

Metrické úlohy

Spádové a hlavné priamky roviny
Otočenie roviny do priemetne
Metrické vlastnosti rovinného útvaru
Delenie úsečky, dĺžka úsečky
Kolmica na rovinu

Spádové priamky roviny

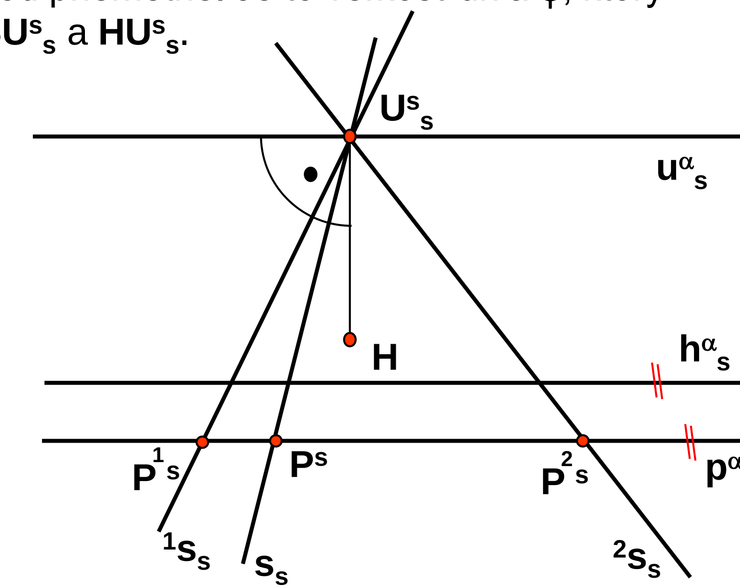


Spádové priamky roviny sú priamky ležiace v danej rovine a kolmé na jej stopu.

Úbežník $\mathbf{U^s_s}$ spádových priamok roviny α nazývame **hlavný úbežník roviny α**.

Trojuholník $\mathbf{SHU^s_s}$ je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole **H**.
Rovina $\mathbf{SHU^s_s}$ je kolmá na priemetňu.
Kolmý priemet trojuholníka $\mathbf{SHU^s_s}$ do priemetne je úsečka $\mathbf{HU^s_s} \perp \mathbf{u^\alpha_s}$.
Priamka $\mathbf{SU^s_s}$ je smerová priamka spádových priamok roviny α.

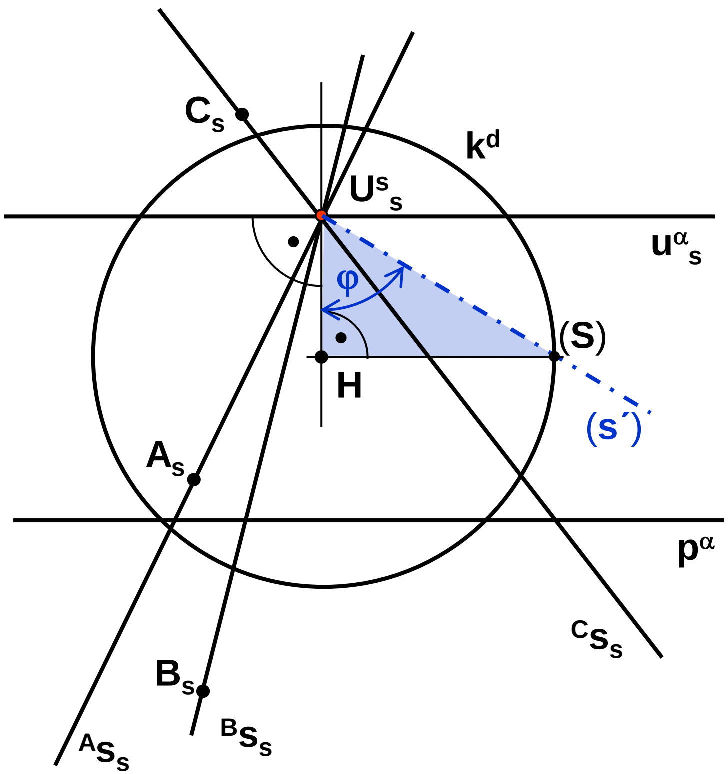
Odchýlka roviny α od priemetne sa rovná odchýlke jej spádovej priamky od priemetne. Je to veľkosť uhla φ, ktorý zvierajú priamky $\mathbf{SU^s_s}$ a $\mathbf{HU^s_s}$.



Poznámka: **Hlavné priamky roviny** sú priamky ležiace v danej rovine a rovnobežné s jej stopou.

S6

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Rovina α je určená stopou $\mathbf{p}^\alpha$ a úbežnicou $\mathbf{u}^\alpha{}_s$.
Dané sú stredové priemety bodov **A**, **B**, **C**, ktoré ležia v rovine α.
Zobrazte stredové priemety spádových priamok roviny α, ktoré incidujú s bodmi **A**, **B**, **C**.
Určte odchýlku roviny α od priemetne.



Postup rysovania:

1) Zobrazíme úbežník $\mathbf{U^s{}_s}$ spádových priamok roviny α.
$\mathbf{HU^s{}_s} \perp \mathbf{u^\alpha{}_s}$

2) Všetky spádové priamky roviny α sú navzájom rovnobežné, preto ich stredové priemety majú spoločný úbežník $\mathbf{U^s{}_s}$.
$^{A}\mathbf{s_s} = \mathbf{A_sU^s{}_s}$
$^{B}\mathbf{s_s} = \mathbf{B_sU^s{}_s}$
$^{C}\mathbf{s_s} = \mathbf{C_sU^s{}_s}$

3) Sklopíme trojuholník $\mathbf{SHU^s{}_s}$ do priemetne.
Vzdialenosť bodu **S** od bodu **H** sa rovná dištancii, preto bod (**S**) leží na dištančnej kružnici $\mathbf{k^d}$.

Odchýlka roviny α od priemetne sa rovná veľkosti uhla φ, ktorý zvierajú priamky $(\mathbf{S})\mathbf{U^s{}_s}$ a $\mathbf{HU^s{}_s}$.

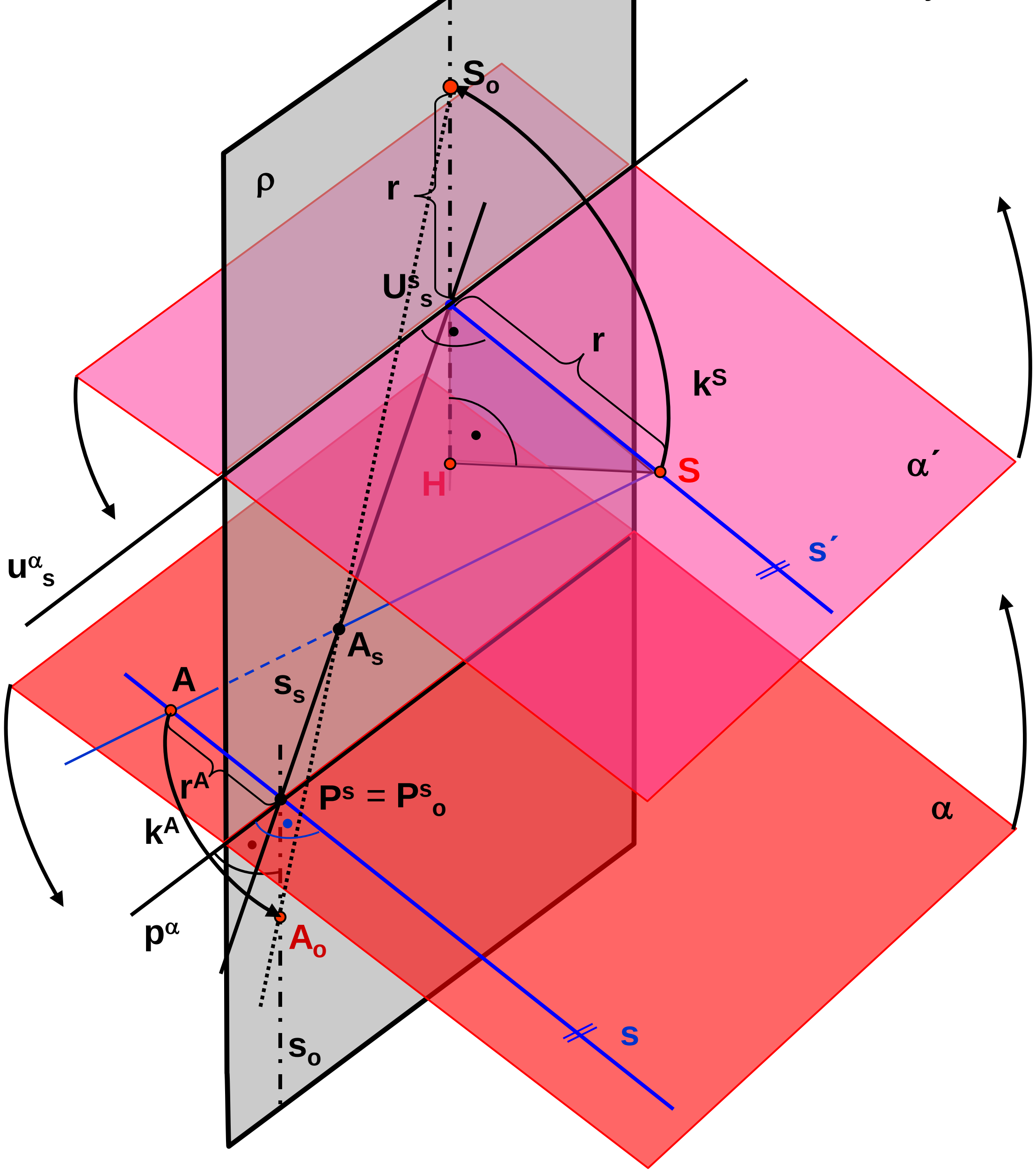
Otočenie roviny do priemetne

Úlohy týkajúce sa metrických vlastností rovinných útvarov budeme riešiť pomocou otočenia roviny do priemetne.

Otočenie roviny a jej smerovej roviny do priemetne

(prvý spôsob – pomocou spádovej priamky)

Mészárosová



Nech je daná rovina α, jej smerová rovina α' a bod $\mathbf{A} \in \alpha$.

Otočenie roviny α do priemetne pomocou spádovej priamky:

Rovinu α otočíme okolo jej stopy $\mathbf{p}^\alpha$ do priemetne ρ. Bodom **A** zostrojíme spádovú priamku **s** roviny α. Stopník $\mathbf{P}^s$ spádovej priamky **s** je totožný so svojou otočenou polohou $\mathbf{P}^s_o$. Otočená poloha $\mathbf{s}_o$ spádovej priamky **s** je kolmá na stopu $\mathbf{p}^\alpha$. $\mathbf{A}_o \in \mathbf{s}_o$.

Bod **A** sa otáča po kružnici $\mathbf{k}^A$ so stredom v bode $\mathbf{P}^s$ a s polomerom $\mathbf{r}^A = \mathbf{AP}^s$.

Otočenie smerovej roviny α' do priemetne:

Smerovú rovinu α' otočíme okolo úbežnice $\mathbf{u}^\alpha_s$ do priemetne ρ. Uhol otáčania je rovnaký ako pri otáčaní roviny α.

Bod $\mathbf{S} \in \alpha'$ sa otáča po kružnici $\mathbf{k}^S$, ktorá leží v rovine trojuholníka $\mathbf{SHU}^s_s$.

Stred kružnice $\mathbf{k}^S$ je bod $\mathbf{U}^s_s$ a jej polomer **r** sa rovná dĺžke prepony trojuholníka $\mathbf{SHU}^s_s$.

Otočenú polohu bodu **S** označíme $\mathbf{S}_o$.

V priemetni ρ platí:

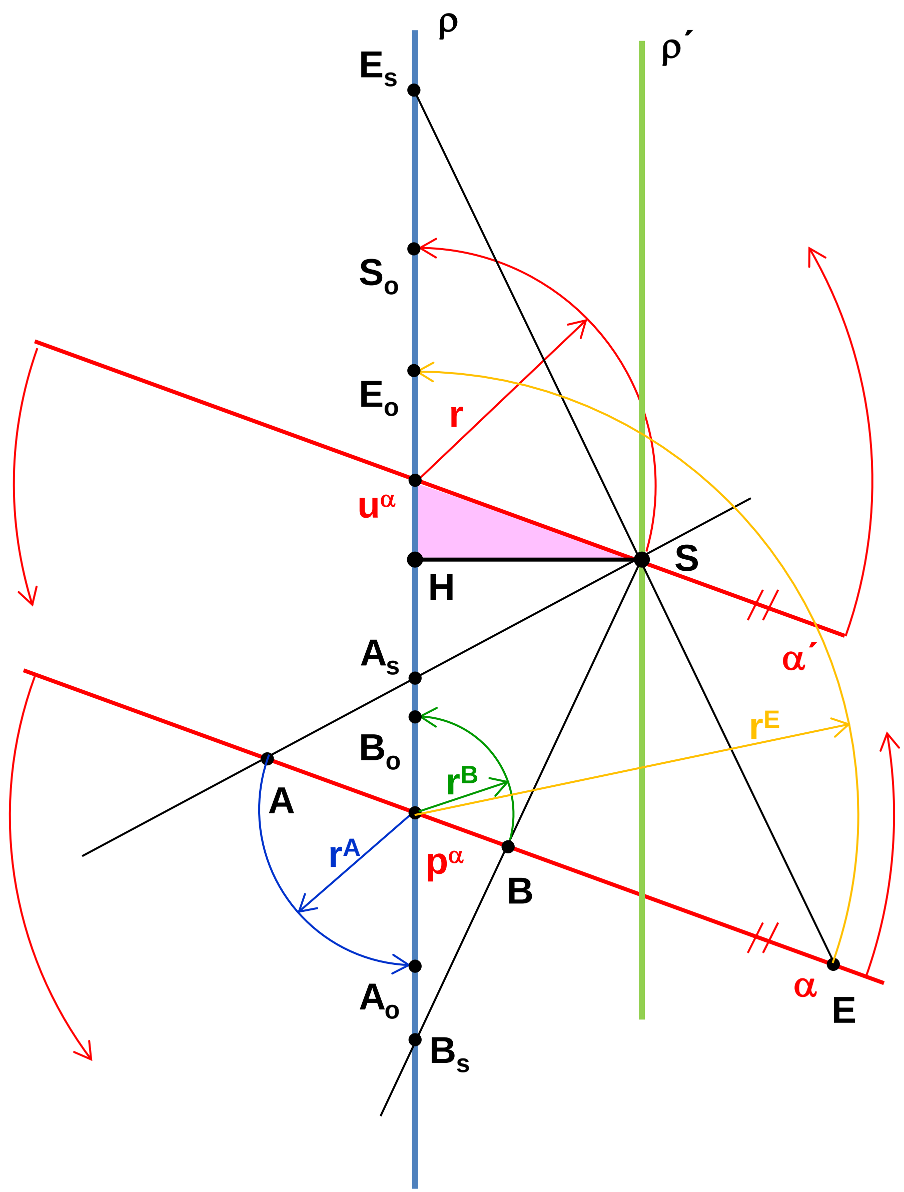
Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne platí vzťah perspektívnej kolineácie.

Stredom kolineácie je bod $\mathbf{S}_o$, osou kolineácie je stopa $\mathbf{p}^\alpha$ a dvojica zodpovedajúcich si bodov je $\mathbf{A}_s$, $\mathbf{A}_o$.

Otočenie roviny a jej smerovej roviny do priemetne

“Pohľad zboku”, t. j. ak sa priemetňa ρ aj rovina α premietajú do priamok.

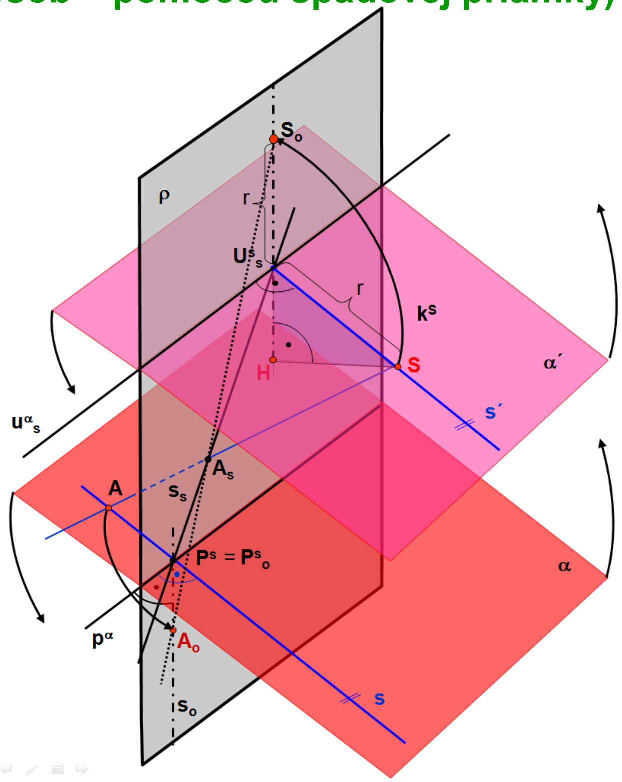
A $\in \alpha$, **B** $\in \alpha$, **E** $\in \alpha$

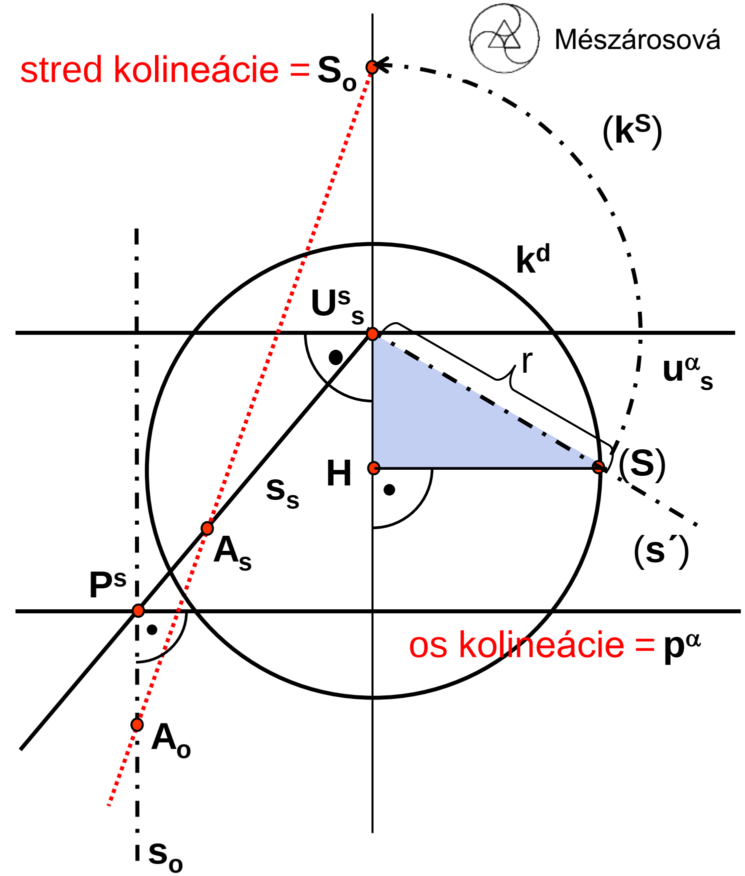


Otočenie roviny a jej smerovej roviny do priemetne

(prvý spôsob – pomocou spádovej priamky)

Mészárosová





Úloha: Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, **k**^{d}. Daná je rovina α svojou stopou a úbežnicou. Bod **A** leží v rovine α. Otočte rovinu α a rovinu $\alpha´$ do priemetne. Zobrazte otočenú polohu bodu **A**. Použite spádovú priamku roviny α incidujúcu s bodom **A**.

Postup rysovania:

1) $s_s = A_sU^s_s$

2) $s_o \perp p^\alpha \wedge P^s \in s_o$

3) Otočíme bod **S**:

Sklopíme rovinu **SHU**^s_s do priemetne. Bod (**S**) leží na dištančnej kružnici. Dĺžka prepony trojuholníka (**S**)**HU**^s_s je polomer kružnice **k**^{S}. Zobrazíme sklopenú polohu kružnice **k**^{S} a otočenú polohu bodu **S**.

(**S**)**U**^s_s = (**s**´) – sklopená smerová priamka priamky **s**.

4) Bod A_o leží na otočenej spádovej priamke s_o. $A_o = S_oA_s \cap s_o$

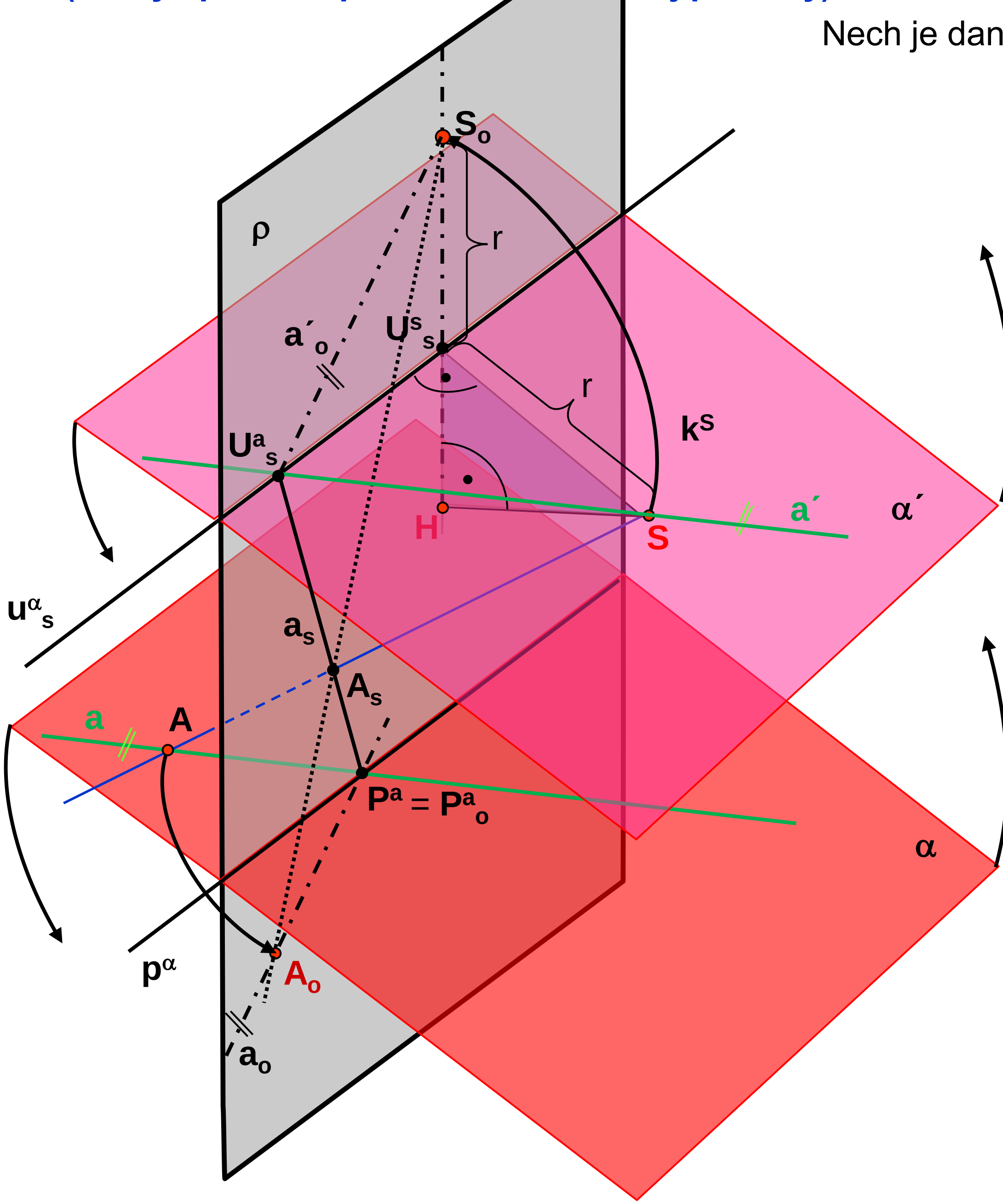
Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne je vzťah perspektívnej kolineácie. Osou kolineácie je stopa p^α, stredom kolineácie je bod S_o, dvojica zodpovedajúcich si bodov je A_s, A_o.

Otočenie roviny a jej smerovej roviny do priemetne

(druhý spôsob – pomocou ľubovoľnej priamky)

Mészárosová

Nech je daná rovina α, jej smerová rovina α' a bod $\mathbf{A} \in \alpha$.



Bodom **A** zostrojíme ľubovoľnú, vhodnú priamku **a** roviny α. Zostrojíme jej smerovú priamku **a´**.

Otočenie smerovej roviny α' do priemetne:
Bod $\mathbf{S_o}$ zostrojíme rovnako ako v predchádzajúcom prípade (pozri str. 5).

Úbežník $\mathbf{U^a_s}$ priamky **a** je pri otáčaní roviny α' totožný so svojou otočenou polohou.
Otočená smerová priamka $\mathbf{a'_o} = \mathbf{S_o U^a_s}$.

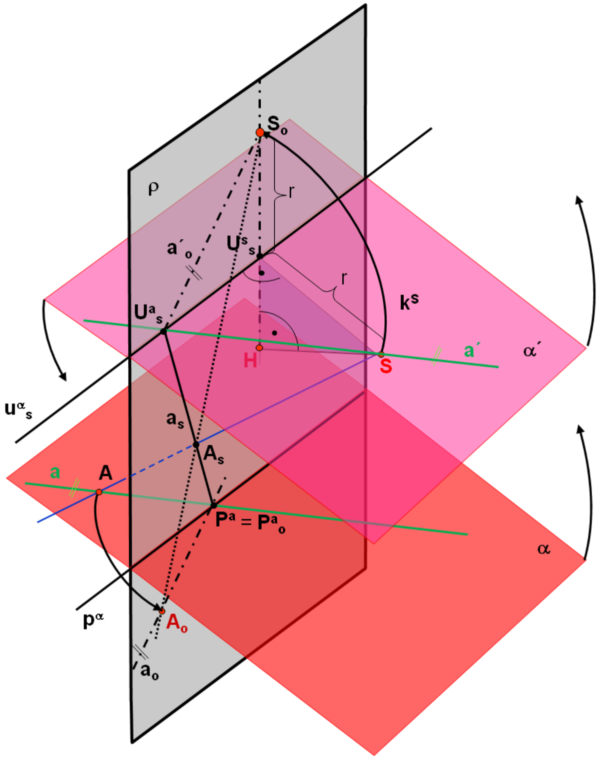
Otočenie roviny α do priemetne pomocou priamky, ktorá inciduje s bodom **A**:
Stopník $\mathbf{P^a}$ priamky **a** je totožný so svojou otočenou polohou $\mathbf{P^a_o}$. Otočená poloha $\mathbf{a_o}$ priamky **a** je rovnobežná s otočenou polohou smerovej priamky **a´**.
$\mathbf{a_o} \parallel \mathbf{a'_o}$

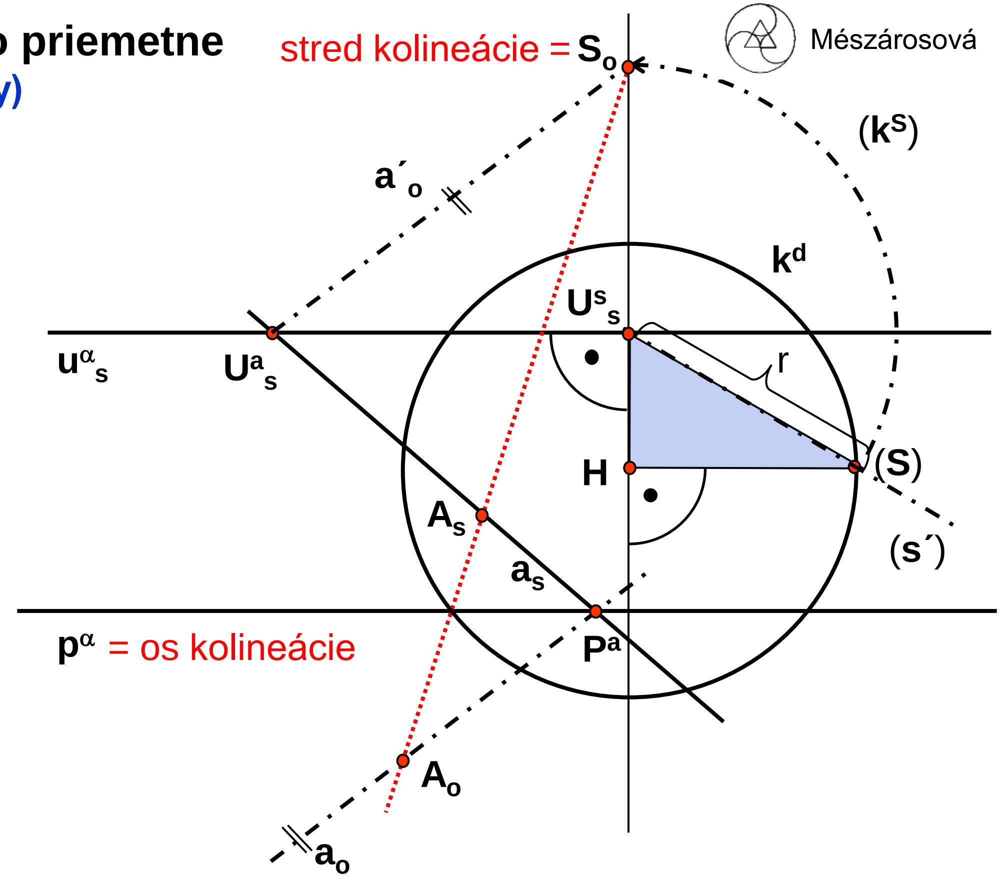
V priemetni ρ platí:
Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne platí vzťah perspektívnej kolineácie.
Stredom kolineácie je bod $\mathbf{S_o}$, osou kolineácie je stopa $\mathbf{p^\alpha}$ a dvojica zodpovedajúcich si bodov je $\mathbf{A_s}$, $\mathbf{A_o}$.

Otočenie roviny a jej smerovej roviny do priemetne

(druhý spôsob – pomocou ľubovoľnej priamky)

Mészárosová





Úloha: Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, **k^d**. Daná je rovina α svojou stopou a úbežnicou. Bod **A** leží v rovine α. Otočte rovinu α a jej smerovú rovinu $\alpha´$ do priemetne. Zobrazte otočenú polohu bodu **A**.

Postup rysovania:

Použijeme ľubovoľnú, vhodne zvolenú priamku **a** roviny α incidujúcu s bodom **A**.

1) $\mathbf{A} \in \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \subset \alpha \Rightarrow \mathbf{P^a} \in \mathbf{p^\alpha} \wedge \mathbf{U^a_s} \in \mathbf{u^\alpha_s}$

2) Otočíme bod **S**:

Sklopíme rovinu **SHU^s_s** do priemetne. Bod (**S**) leží na dištančnej kružnici. Dĺžka prepony trojuholníka (**S**)**HU^s_s** je polomer kružnice **k^S**. Zobrazíme sklopenú polohu kružnice **k^S** a otočenú polohu bodu **S**.

3) $\mathbf{a´_o} = \mathbf{S_o U^a_s}$

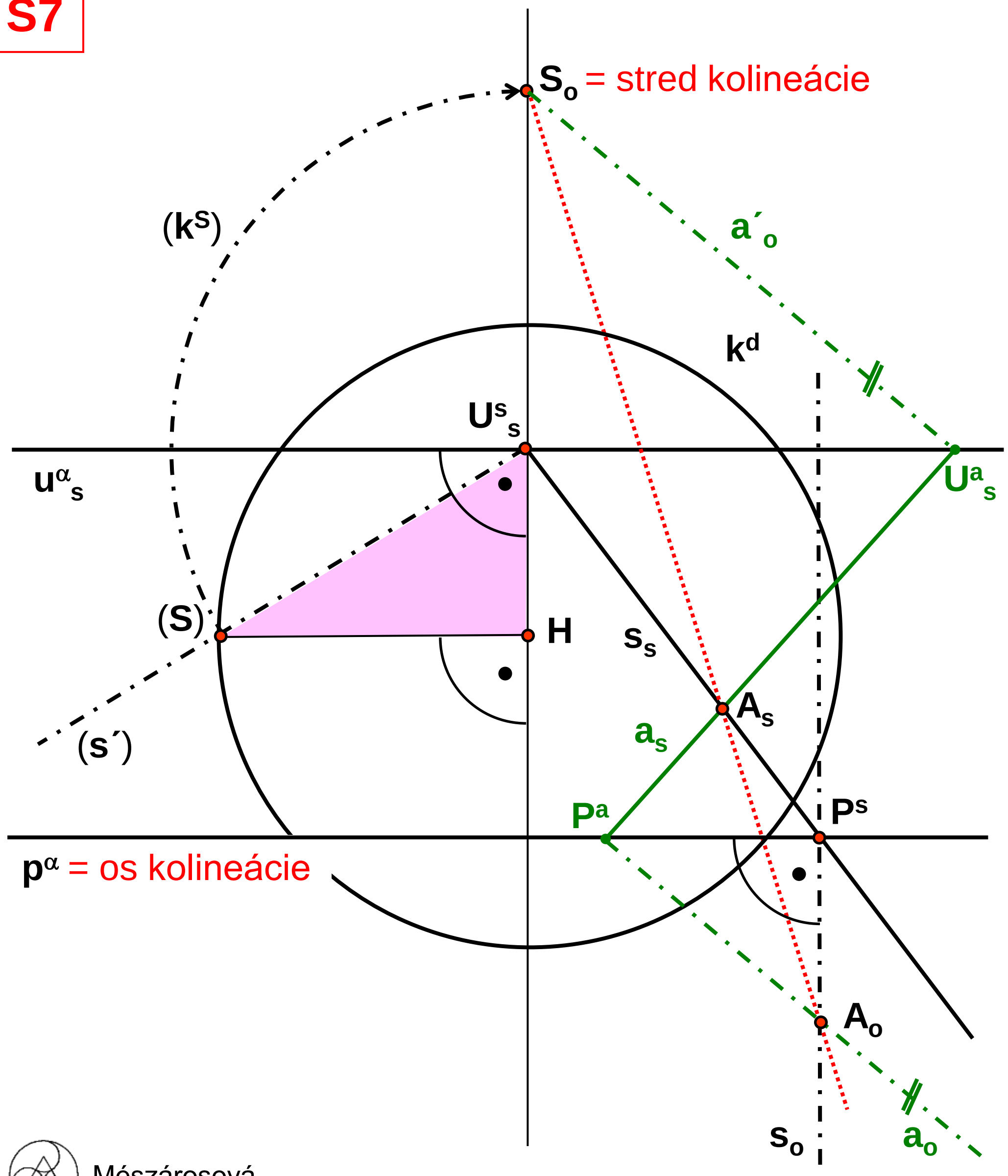
4) $\mathbf{a_o} \parallel \mathbf{a´_o} \wedge \mathbf{P^a} \in \mathbf{a_o}$

5) Bod **A$_o$** leží na otočenej priamke **a$_o$**. $\mathbf{A_o} = \mathbf{S_o A_s} \cap \mathbf{a_o}$

Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne je vzťah perspektívnej kolineácie.
Osou kolineácie je stopa **p$^\alpha$**, stredom kolineácie je bod **S$_o$**, dvojica zodpovedajúcich si bodov je **A$_s$**, **A$_o$**.

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Rovina α je určená stopou $\mathbf{p^\alpha}$ a úbežnicou $\mathbf{u^\alpha_s}$. Bod **A** $\in \alpha$. Otočte rovinu α do priemetne. Zobrazte otočenú polohu bodu **A**. Použite obidva spôsoby.

S7



Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu S:

Sklopíme trojuholník $\mathbf{SHU^s_s}$ do priemetne.

Bod (**S**) leží na dištančnej kružnici.

$(\mathbf{S})\mathbf{U^s_s} = (\mathbf{s}´)$

Dĺžka prepony trojuholníka $(\mathbf{S})\mathbf{HU^s_s}$ je polomer kružnice $\mathbf{k^S}$. Narysujeme sklopenú polohu kružnice $\mathbf{k^S}$. Stred kružnice $(\mathbf{k^S})$ je v bode $\mathbf{U^s_s}$.

2) Zobrazíme otočenú polohu bodu A:

Prvý spôsob pomocou spádovej priamky:

Zobrazíme spádovú priamku **s** roviny α incidujúcu s bodom **A** a jej otočenú polohu:

$\mathbf{s_o} \perp \mathbf{p^\alpha} \wedge \mathbf{P^s} \in \mathbf{s_o}$

Bod $\mathbf{A_o}$ leží na otočenej spádovej priamke $\mathbf{s_o}$.

$\mathbf{A_o} = \mathbf{S_oA_s} \cap \mathbf{s_o}$

Druhý spôsob: Použijeme ľubovoľnú, vhodne zvolenú priamku roviny α incidujúcu s bodom **A**.

$\mathbf{A} \in \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \subset \alpha \Rightarrow \mathbf{P^a} \in \mathbf{p^\alpha} \wedge \mathbf{U^a_s} \in \mathbf{u^\alpha_s}$

$\mathbf{a´_o} = \mathbf{S_oU^a_s}$

$\mathbf{a_o} \parallel \mathbf{a´_o} \wedge \mathbf{P^a} \in \mathbf{a_o}$

Bod $\mathbf{A_o}$ leží na otočenej priamke $\mathbf{a_o}$.

$\mathbf{A_o} = \mathbf{S_oA_s} \cap \mathbf{a_o}$

3) $\mathbf{A_o} = \mathbf{s_o} \cap \mathbf{a_o}$

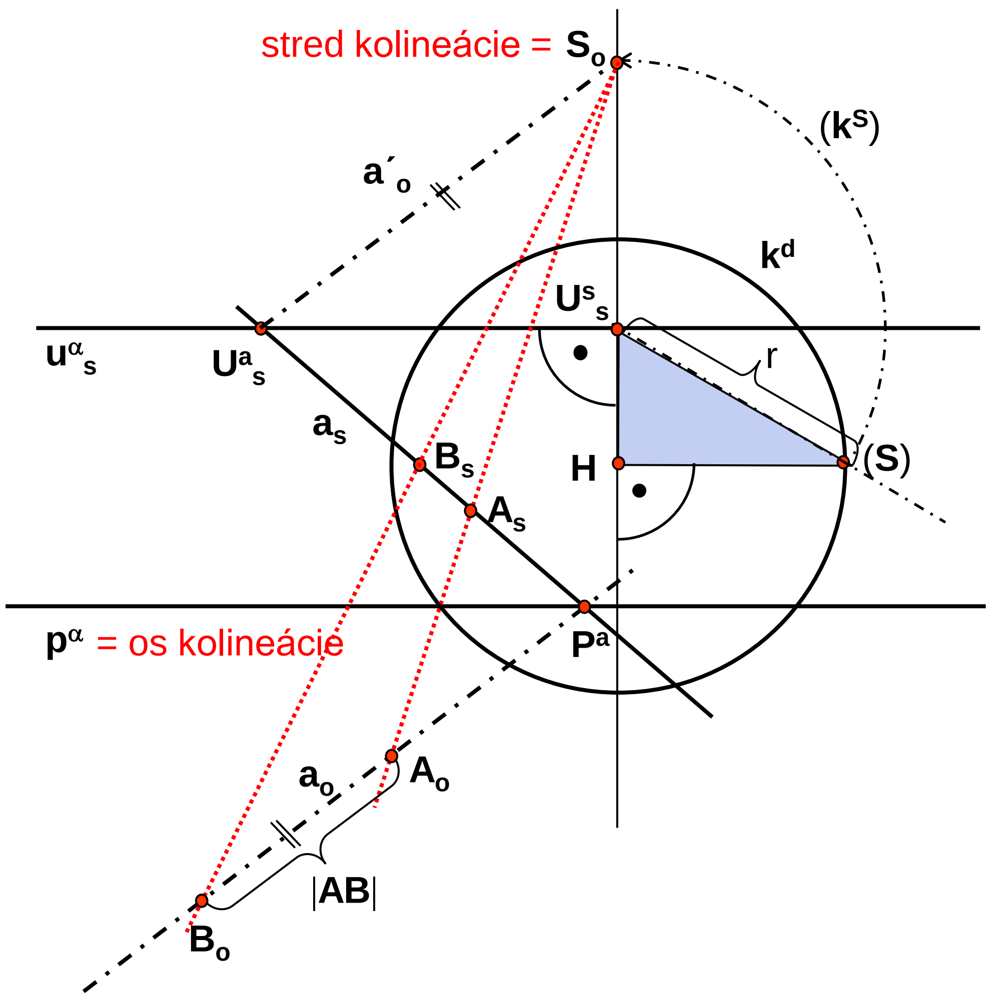
Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne je vzťah perspektívnej kolineácie. Osou kolineácie je stopa $\mathbf{p^\alpha}$, stredom kolineácie je bod $\mathbf{S_o}$, dvojica zodpovedajúcich si bodov je $\mathbf{A_s}$, $\mathbf{A_o}$.

Metrické vlastnosti rovinného útvaru

Dĺžka úsečky
Odchýlka priamok
Zobrazenie n-uholníka

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Daný je stredový priemet úsečky **AB**, ktorá leží v rovine α. Rovina α je určená stopou a úbežnicou. Určte dĺžku úsečky **AB**. Použite otočenie roviny α do priemetne.

S8



Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu **S**.

2) Zobrazíme otočenú polohu priamky **a´**.
$a'_o = U^a_s S_o$

3) Zobrazíme otočenú polohu priamky **a**.
$a_o \parallel a'_o \wedge P^a \in a_o$

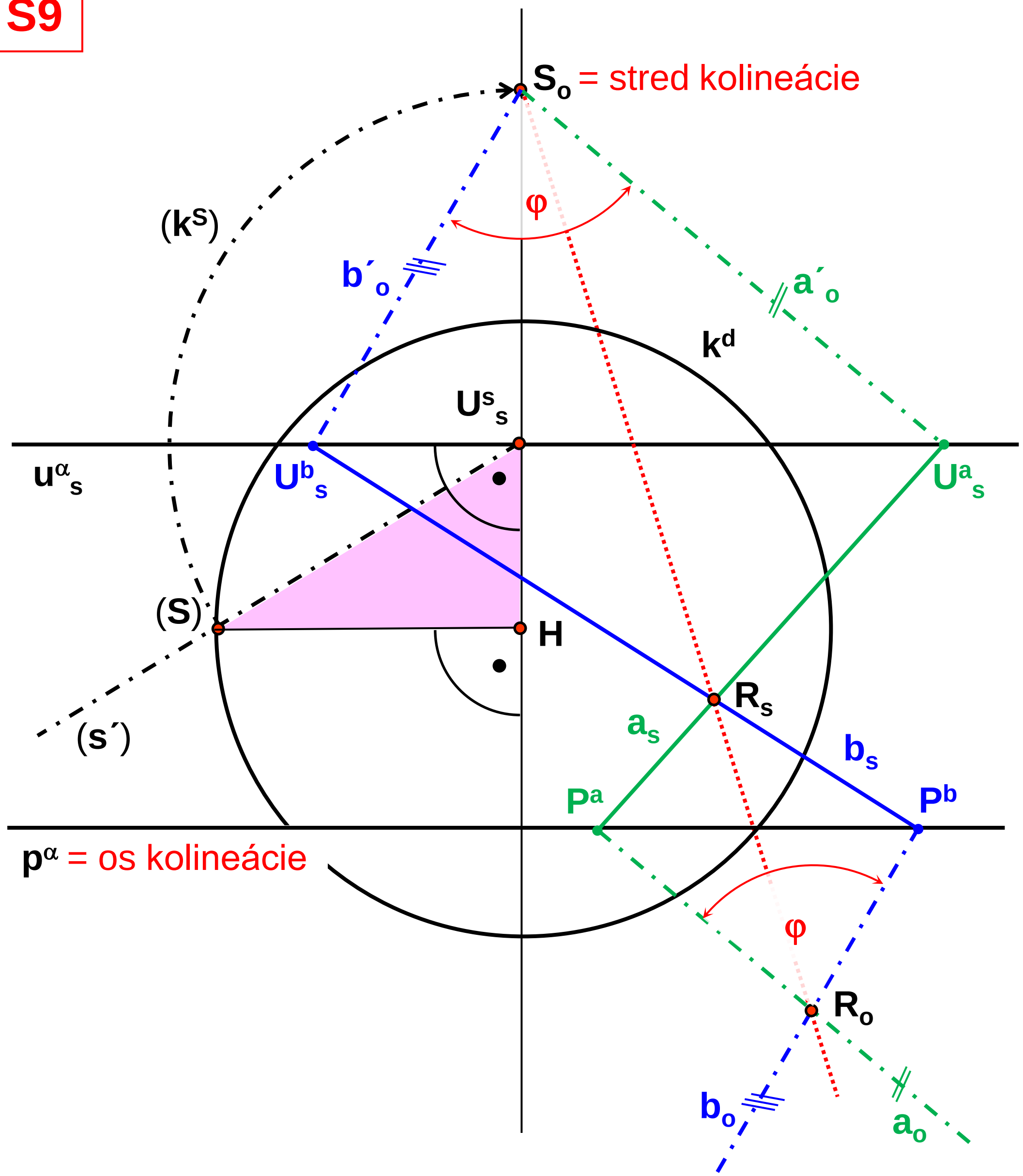
4) Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne je vzťah perspektívnej kolineácie.
Osou kolineácie je stopa p^α,
stredom kolineácie je bod S_o,
dvojica zodpovedajúcich si bodov je A_s, A_o.
$A_o = S_oA_s \cap a_o$
$B_o = S_oB_s \cap a_o$

5) Otočenie roviny je zhodnosť, preto platí:
$|AB| = |A_oB_o|$

Mészárosová

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, **k^d**. Rovina α je určená stopou **p$^\alpha$** a úbežnicou **u$^\alpha_s$**. Priamky **a**, **b** ležia v rovine α . Určte odchýlku priamok **a**, **b**.

S9



Úlohu vyriešime dvomi spôsobmi: pomocou otočenia roviny α' do priemetne, aj pomocou otočenia roviny α do priemetne.

Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu **S**.

2) Otočíme rovinu α' do priemetne.
Zobrazíme otočenú polohu priamok **a´** a **b´**.
$a'_o = U^a_s S_o$
$b'_o = U^b_s S_o$

$\measuredangle$ (**a**, **b**) = $\measuredangle$(a'_o, b'_o) = φ

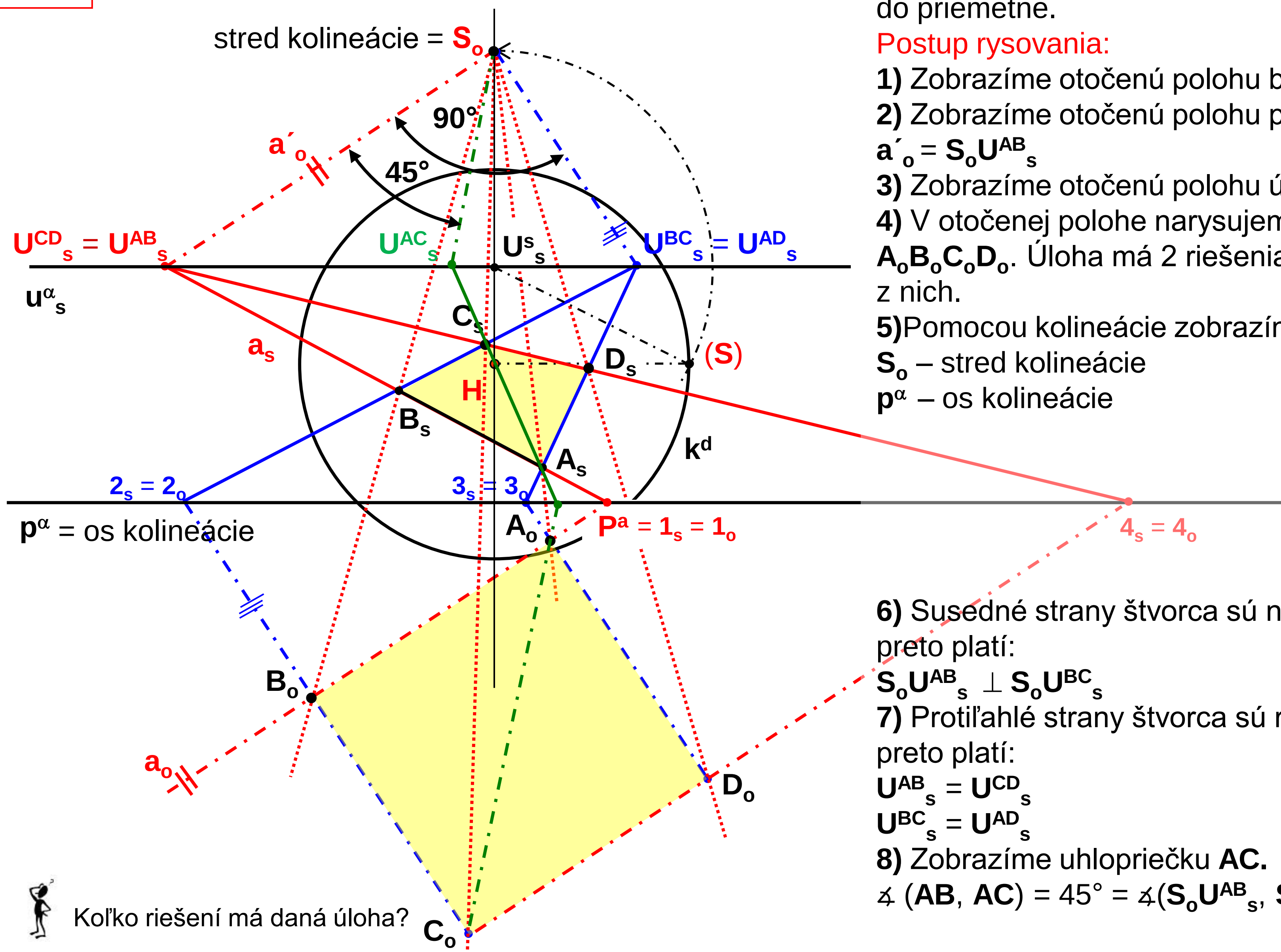
Poznámka: Odchýlka priamok **a**, **b** je veľkosť menšieho z uhlov, ktoré priamky **a**, **b** zvierajú.

3) Otočíme rovinu α do priemetne.
Zobrazíme otočenú polohu priamok **a** a **b**.
$a_o \parallel a'_o \wedge P^a \in a_o$
$b_o \parallel b'_o \wedge P^b \in b_o$

$\measuredangle$ (**a**, **b**) = $\measuredangle$(a_o, b_o) = φ

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, **k^d**. Rovina α je určená stopou **p^α** a úbežnicou **u^α_s**. Priamka **a** = **AB** leží v rovine α. Zobrazte stredový priemet štvorca **ABCD**, ktorý leží v rovine α a úsečka **AB** je jeho strana.

S10



Koľko riešení má daná úloha?

Úlohu vyriešime pomocou otočenia rovín α a α' do priemetne.

Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu **S**.

2) Zobrazíme otočenú polohu priamky **a´**.

$a'_o = S_oU^{AB}_s$

3) Zobrazíme otočenú polohu úsečky **AB**.

4) V otočenej polohe narysujeme štvorec $A_oB_oC_oD_o$. Úloha má 2 riešenia, zvolíme jedno z nich.

5)Pomocou kolineácie zobrazíme body C_s a D_s.

S_o – stred kolineácie

p^α – os kolineácie

6) Susedné strany štvorca sú na seba kolmé, preto platí:

$S_oU^{AB}_s \perp S_oU^{BC}_s$

7) Protiľahlé strany štvorca sú rovnobežné, preto platí:

$U^{AB}_s = U^{CD}_s$

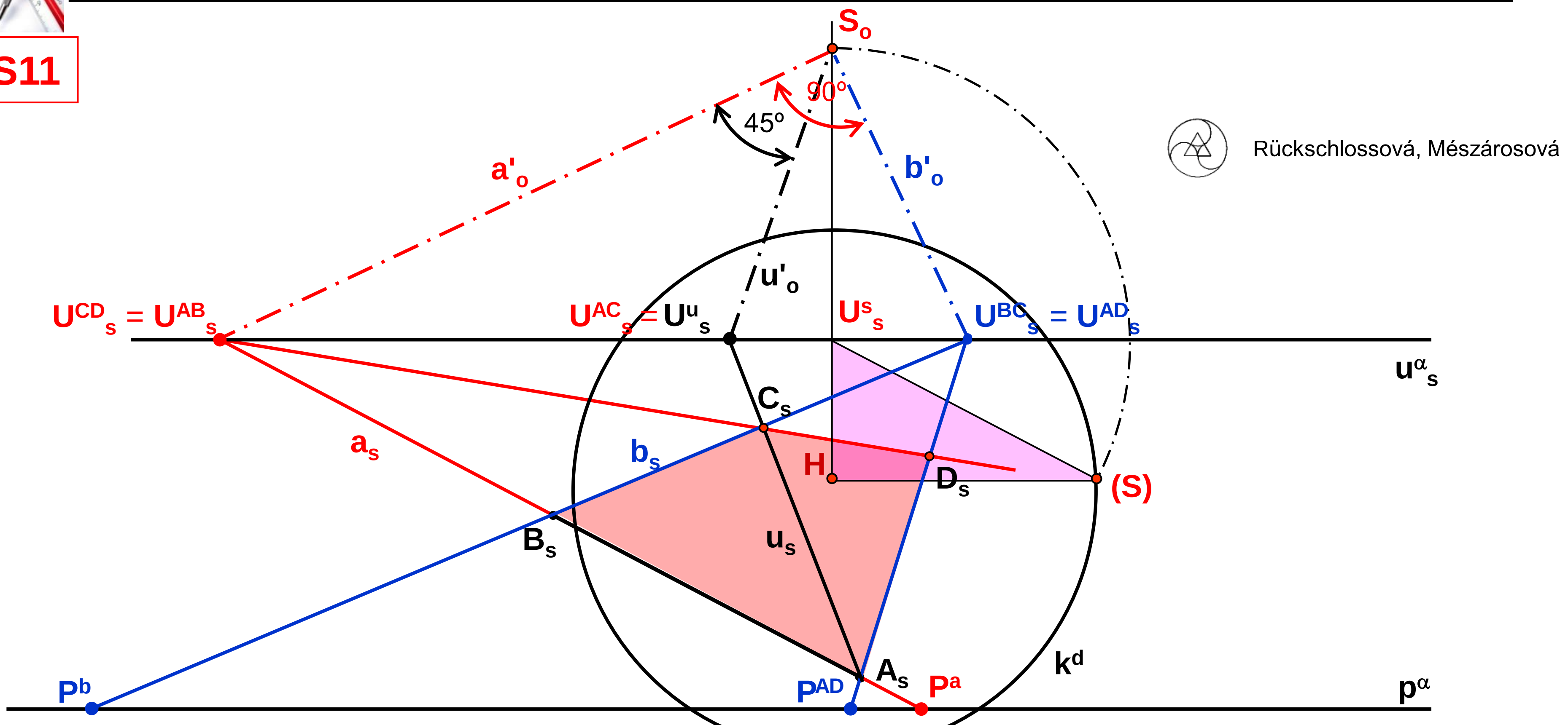
$U^{BC}_s = U^{AD}_s$

8) Zobrazíme uhlopriečku **AC.**

$\measuredangle$ (**AB**, **AC**) = 45° = $\measuredangle(S_oU^{AB}_s, S_oU^{AC}_s)$

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, **k**^{d}. V stredovom premietaní zobrazte štvorec **ABCD** ležiaci v rovine α. Štvorec je daný stranou **AB** na priamke **a**.

S11



Úlohu vyriešime len pomocou otočenia smerovej roviny α' do priemetne (bez otočenia roviny α a kolineácie).

Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu **S** a priamky **a´**. $\mathbf{a'_o} = \mathbf{S_o U^{AB}_s}$.

2) Susedné strany štvorca sú na seba kolmé, preto platí: $\mathbf{S_o U^{AB}_s} \perp \mathbf{S_o U^{BC}_s}$, $\mathbf{b} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{b} \subset \alpha \Rightarrow \mathbf{P^b} \in \mathbf{p^\alpha}$.

3) Narysujeme otočenú smerovú priamku $\mathbf{u'_o}$ uhlopriečky **u** = **AC** štvorca **ABCD**. $\measuredangle(\mathbf{a'_o}, \mathbf{u'_o}) = \mathbf{45°}$.

4) $\mathbf{C_s} = \mathbf{b_s} \cap \mathbf{u_s}$.

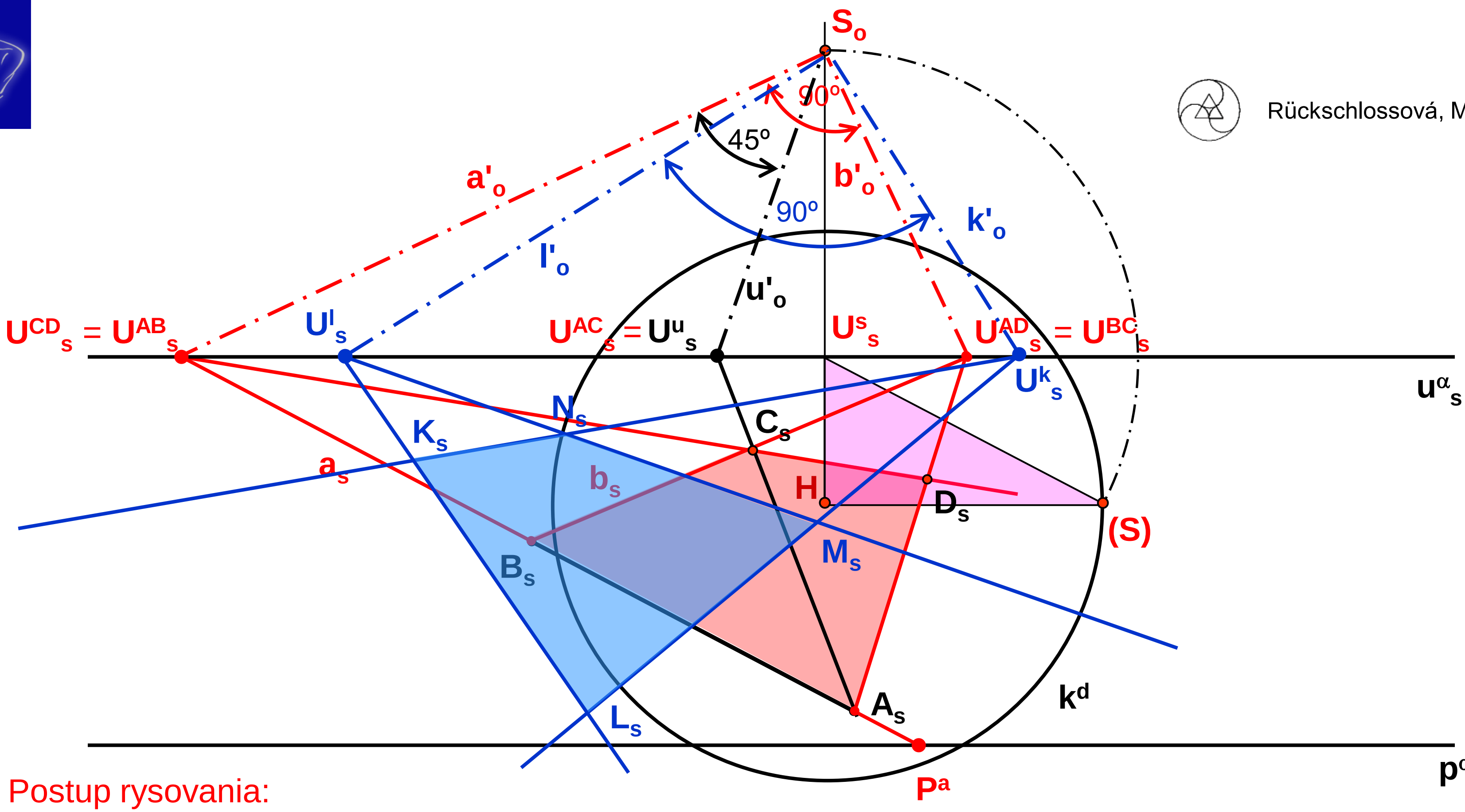
5) Protiľahlé strany štvorca sú rovnobežné, preto platí: $\mathbf{U^{AB}_s} = \mathbf{U^{CD}_s}$ a $\mathbf{U^{BC}_s} = \mathbf{U^{AD}_s}$.

$\mathbf{D_s} = \mathbf{U^{CD}_s C_s} \cap \mathbf{U^{AD}_s A_s}$.

Poznámka: Tento postup je vhodný pri zobrazení n-uholníkov, ak poznáme veľkosti uhlov, ktoré zvierajú strany n-uholníka. Porovnajte s príkladom **S10**.

Daný je stredový priemet štvorca **ABCD**, ktorý leží v rovine α. Zobrazte stredový priemet ľubovoľného obdĺžnika, ktorý leží v rovine α, alebo v rovine rovnobežnej s rovinou α a je vzhľadom na štvorec **ABCD** otočený o ľubovoľný uhol.

Rückschlossová, Mészárosová



Postup rysovania:

1) Zvolíme ľubovoľný úbežník $\mathbf{U^l_s}$ na úbežnici $\mathbf{u^\alpha_s}$.

2) Narysujeme úbežník $\mathbf{U^k_s}$ priamky kolmej na priamku **l.** $\mathbf{l'_o \perp k'_o}$.

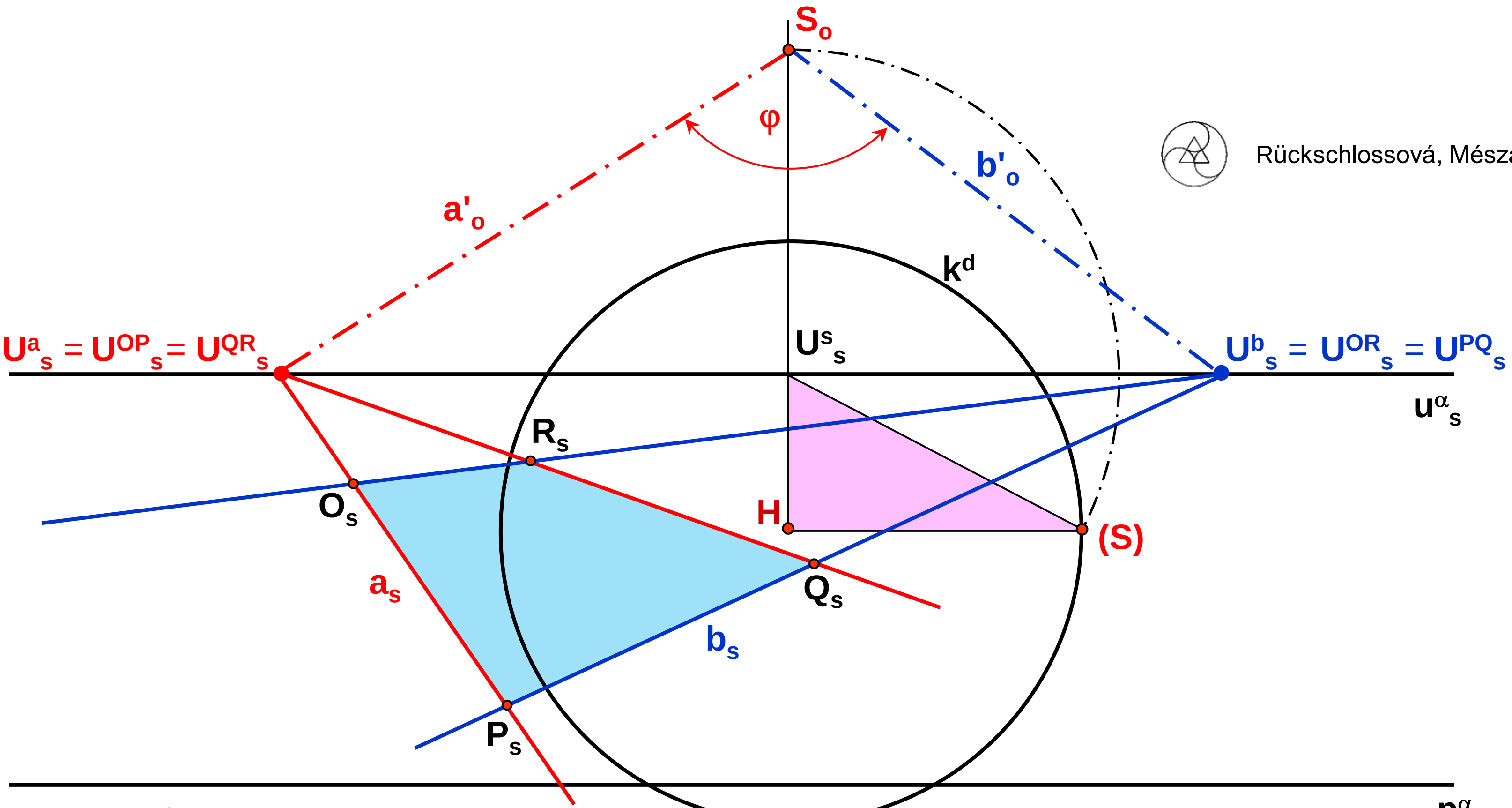
3) Platí: $\mathbf{U^l_s = U^{KL}_s = U^{MN}_s}$ a $\mathbf{U^k_s = U^{LM}_s = U^{NK}_s}$.

KLMN je obdĺžnik ležiaci v rovine α, alebo v rovine rovnobežnej s rovinou α. (Pozri stranu 29 v kapitole S1.)

Doplňte obrázok tak, aby platilo, že obdĺžnik **KLMN** leží v rovine α.

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Daná je stopa a úbežnica roviny α. Daný je stredový priemet bodov **O**, **P**, **Q**, **R**, ktoré ležia v jednej rovine. Určte aký tvar má rovinný útvar **OPQR**.

Rückschlossová, Mészárosová



Postup rysovania:

1) Priamky **OP** a **QR** sú rovnobežné, priamky **OR** a **PQ** sú rovnobežné.

2) Otočíme smerovú rovinu roviny α.

Zobrazíme otočenú polohu bodu **S** a otočené polohy smerových priamok **a´**, **b´**.

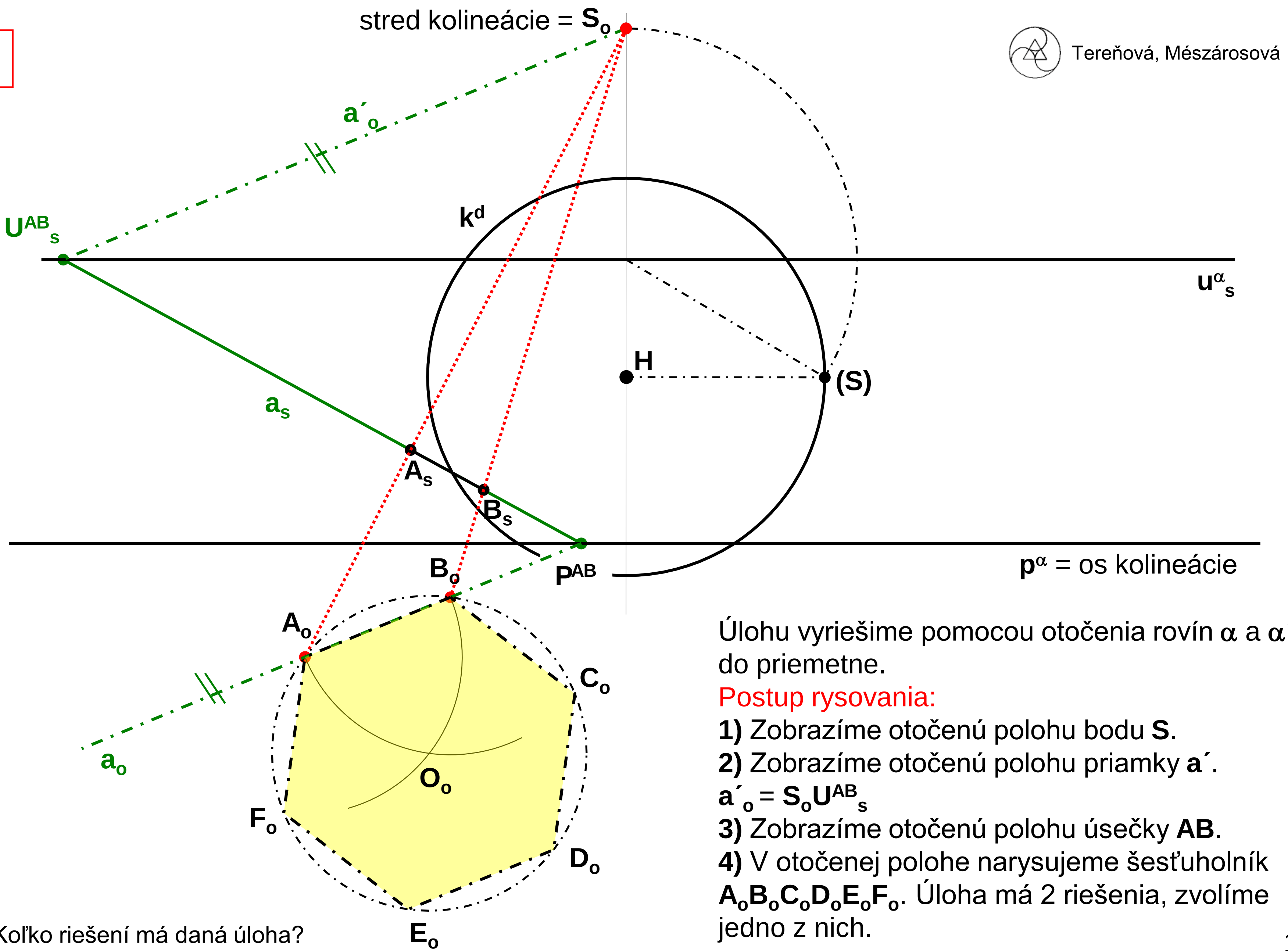
$a'_o = S_oU^a_s$, $b'_o = S_oU^b_s$

3) Priamky a'_o a b'_o nezvierajú pravý uhol, preto útvar **OPQR** je rovnobežník ležiaci v rovine α, alebo v rovine rovnobežnej s rovinou α. (Pozri príklad S9 v tejto kapitole a stranu 29 v kapitole S1.)

Doplňte obrázok tak, aby platilo, že rovnobežník **OPQR** leží v rovine α.

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. V stredovom premietaní zobrazte pravidelný šesťuholník **ABCDEF** ležiaci v rovine α. Dané sú vrcholy **AB** na priamke **a**.

S12



Úlohu vyriešime pomocou otočenia rovín α a α' do priemetne.

Postup rysovania:

1) Zobrazíme otočenú polohu bodu **S**.

2) Zobrazíme otočenú polohu priamky **a´**.

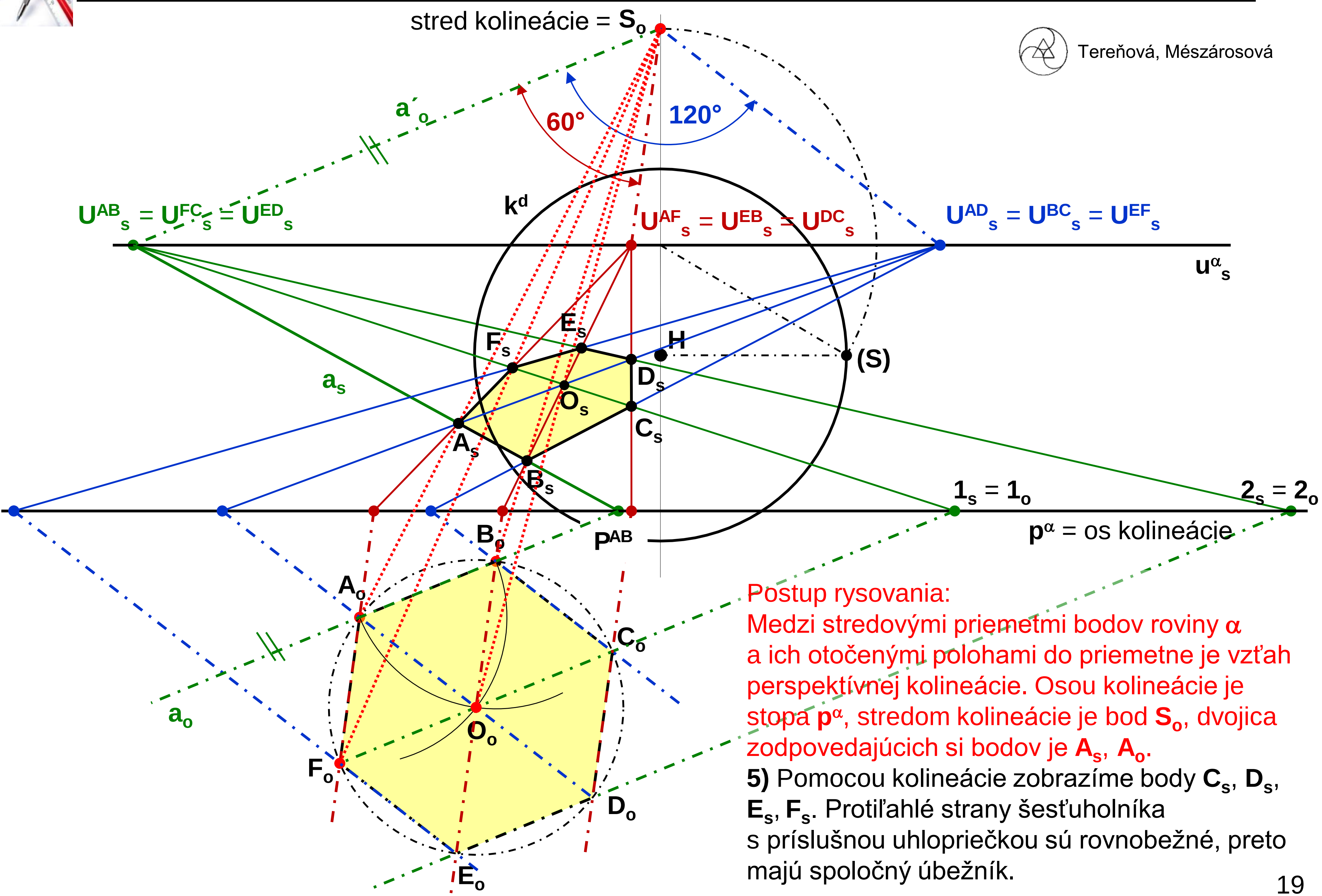
$\mathbf{a'_o = S_o U^{AB}_s}$

3) Zobrazíme otočenú polohu úsečky **AB**.

4) V otočenej polohe narysujeme šesťuholník $\mathbf{A_oB_oC_oD_oE_oF_o}$. Úloha má 2 riešenia, zvolíme jedno z nich.

Koľko riešení má daná úloha?

Dané sú prvky vnútornej orientácie H, k^d. V stredovom premietaní zobrazte pravidelný šesťuholník ABCDEF ležiaci v rovine α. Dané sú vrcholy AB na priamke a.



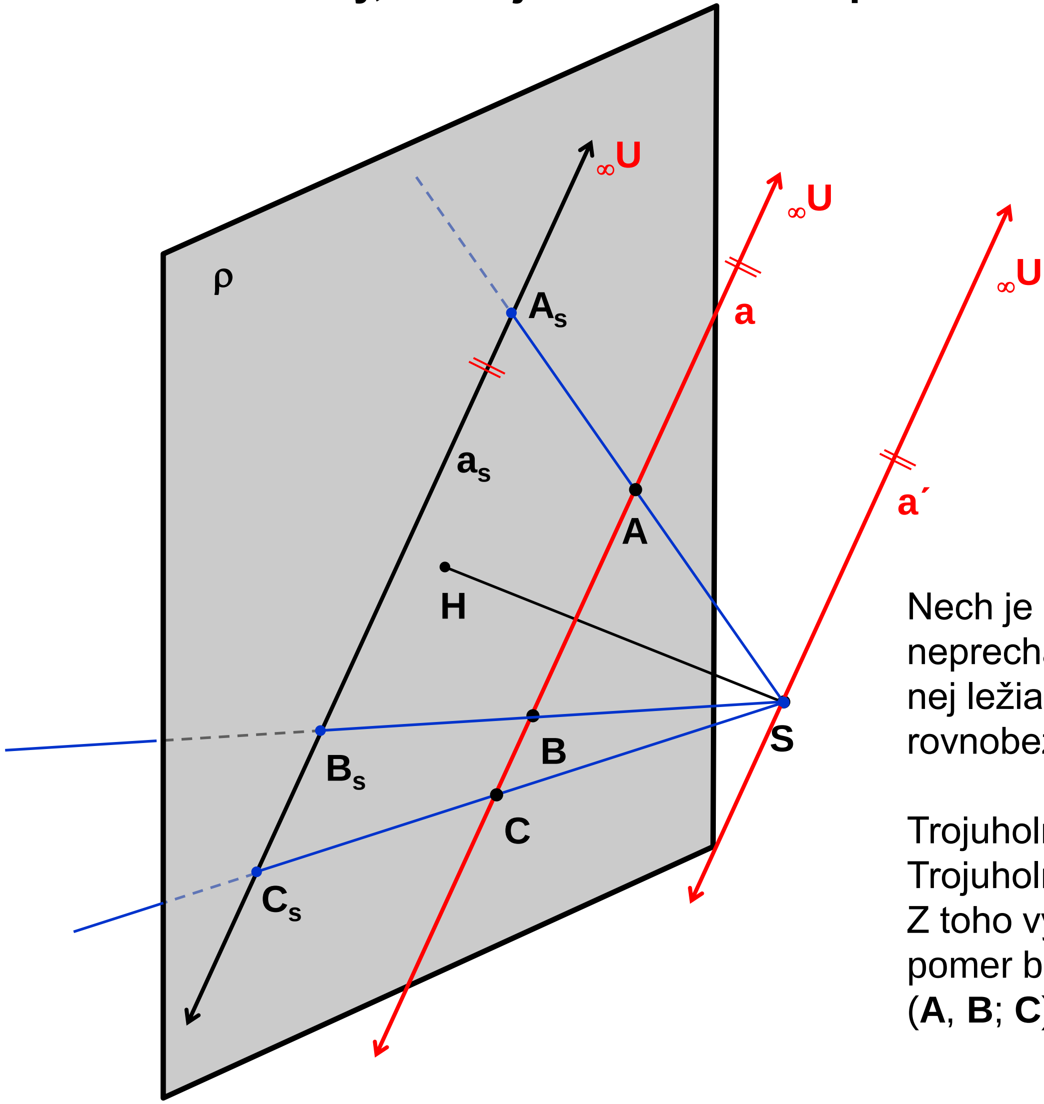
Postup rysovania:

Medzi stredovými priemetmi bodov roviny α a ich otočenými polohami do priemetne je vzťah perspektívnej kolineácie. Osou kolineácie je stopa p^{α}, stredom kolineácie je bod S_o, dvojica zodpovedajúcich si bodov je A_s, A_o.

5) Pomocou kolineácie zobrazíme body C_s, D_s, E_s, F_s. Protiľahlé strany šesťuholníka s príslušnou uhlopriečkou sú rovnobežné, preto majú spoločný úbežník.

Delenie úsečky, dĺžka úsečky
Kolmica na rovinu

Delenie úsečky, ktorá je rovnobežná s priemetňou a neprechádza bodom S



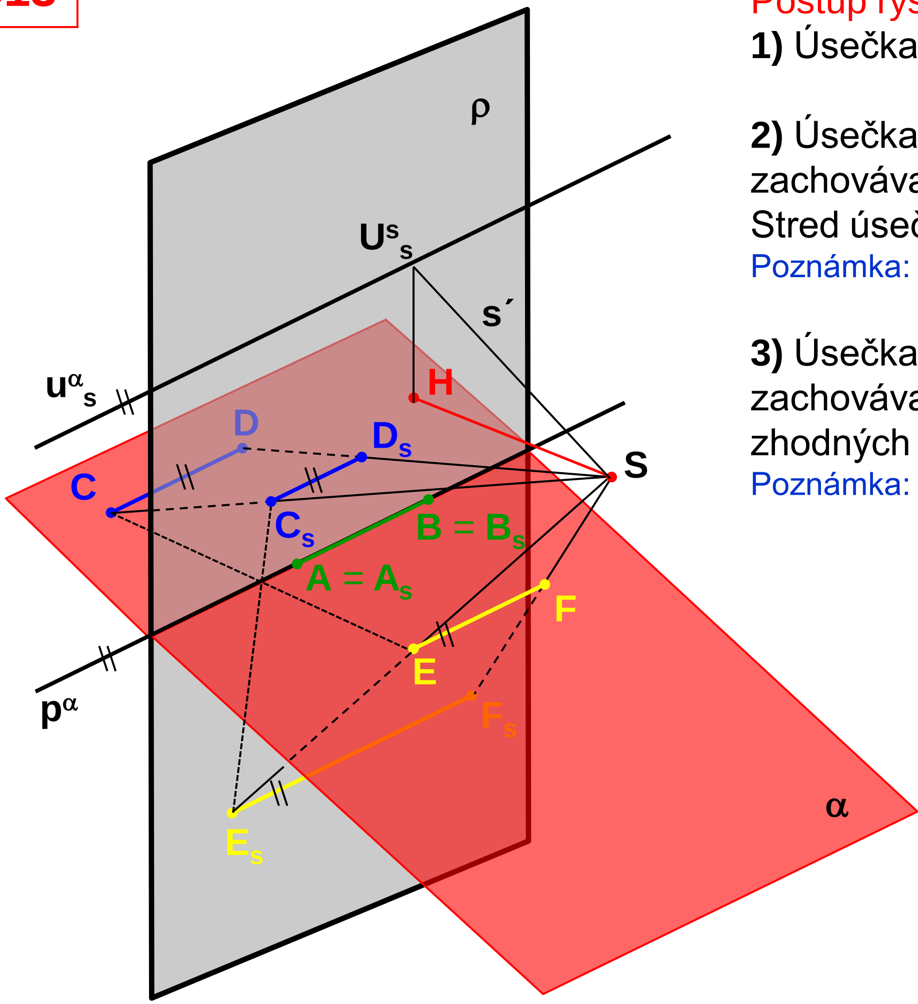
Nech je daná priamka **a** rovnobežná s priemetňou, neprechádzajúca bodom **S**, a body **A**, **B** a **C**, ktoré na nej ležia. Stredový priemet priamky **a** je priamka $\mathbf{a_s}$ rovnobežná s priamkou **a.**

Trojuholníky **SAC** a $\mathbf{SA_sC_s}$ sú podobné.
Trojuholníky **SAB** a $\mathbf{SA_sB_s}$ sú podobné.
Z toho vyplýva, že deliaci pomer bodov **A**, **B**, **C** a deliaci pomer bodov $\mathbf{A_s}$, $\mathbf{B_s}$, $\mathbf{C_s}$ sú zhodné.
$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}) = (\mathbf{A_s}, \mathbf{B_s}; \mathbf{C_s})$

Na priamkach, ktoré sú rovnobežné s priemetňou a neprechádzajú bodom S, sa zachováva deliaci pomer bodov.

Rovina **α** je určená stopou **p^α** a úbežnicou **u^α_s**. Úsečky **AB**, **CD** a **EF** ležia v rovine **α** a sú rovnobežné s priemetňou. Zobrazte stred úsečky **AB** a stred úsečky **CD**. Rozdeľte úsečku **EF** na 5 zhodných úsečiek.

S13

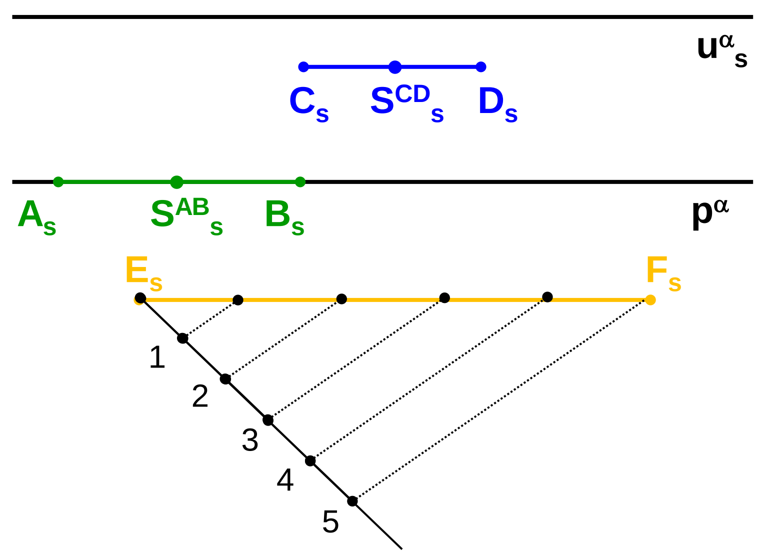


Postup rysovania:

1) Úsečka **AB** leží v priemetni, preto ju môžeme rozdeliť priamo.

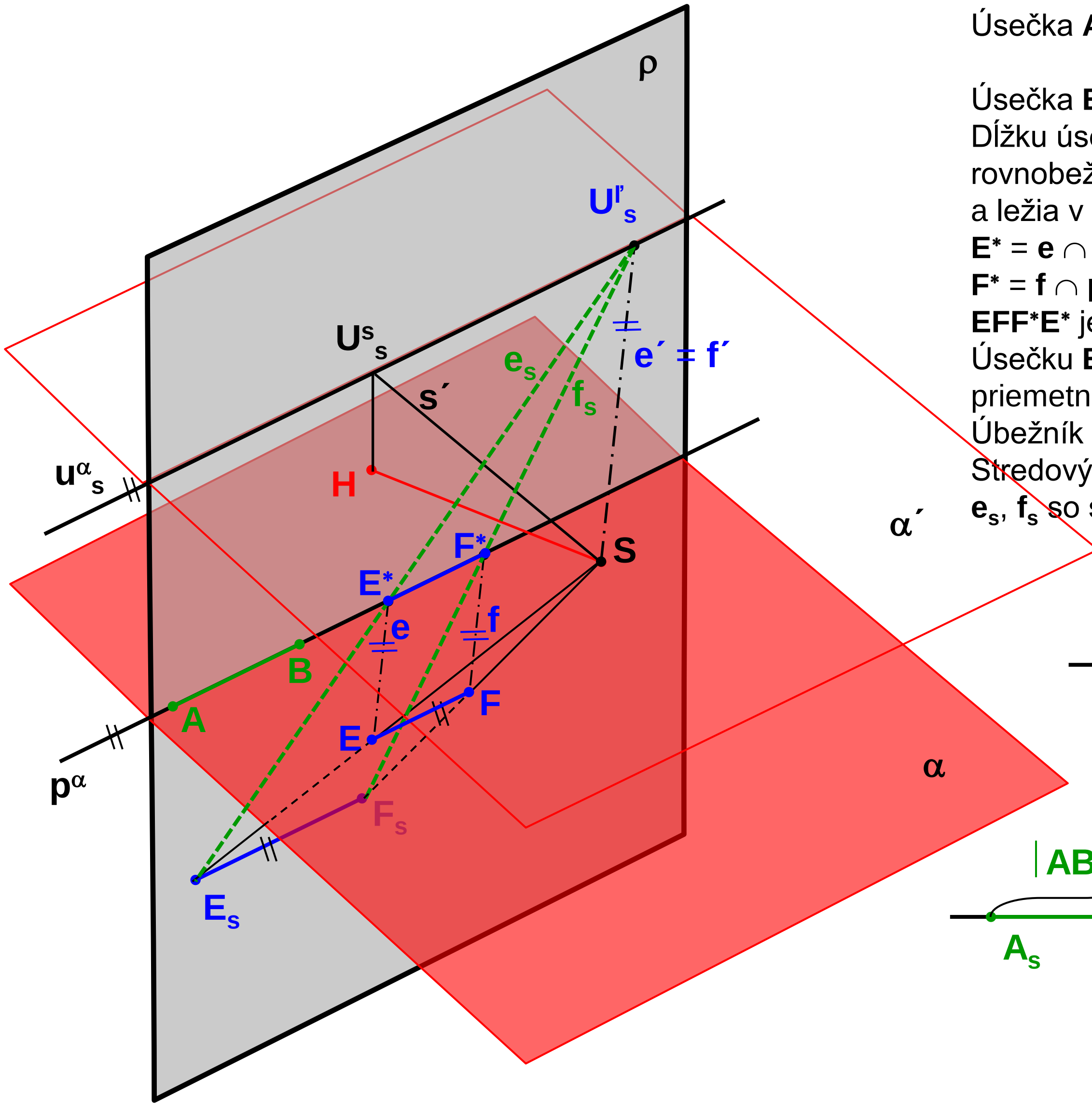
2) Úsečka **CD** je rovnobežná s priemetňou, preto sa na nej zachováva deliaci pomer bodov.
Stred úsečky **CD** sa zobrazuje do stredu úsečky **C_sD_s**.
Poznámka: Dĺžka úsečky **C_sD_s** sa nerovná dĺžke úsečky **CD**.

3) Úsečka **EF** je rovnobežná s priemetňou, preto sa na nej zachováva deliaci pomer bodov. Delenie úsečky **E_sF_s** na 5 zhodných úsečiek urobíme graficky pomocnou konštrukciou.
Poznámka: Dĺžka úsečky **E_sF_s** sa nerovná dĺžke úsečky **EF**.



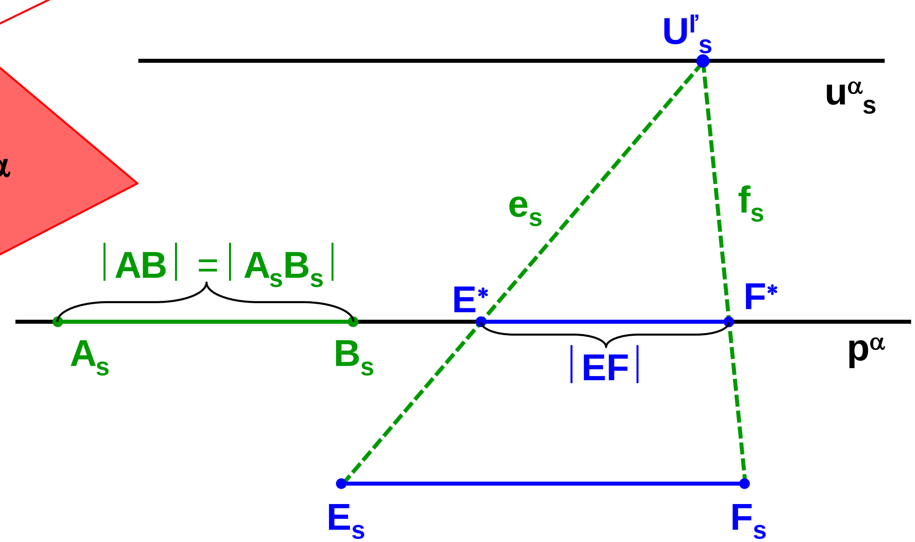
Mészárosová

Dĺžka úsečky, ktorá leží v rovine α a je rovnobežná s priemetňou



Úsečka **AB** leží v priemetni, preto platí: $|AB| = |A_sB_s|$

Úsečka **EF** leží v rovine α a je rovnobežná s priemetňou.
Dĺžku úsečky **EF** určíme pomocou ľubovoľných rovnobežných priamok **e** a **f**, ktoré incidujú s bodmi **E**, **F** a ležia v rovine α.
$E^* = e \cap p^\alpha$
$F^* = f \cap p^\alpha$
EFF*E* je rovnobežník, preto platí: $|EF| = |E^*F^*|$.
Úsečku **EF** sme pomocou rovnobežiek **e**, **f** posunuli do priemetne.
Úbežník $U^{l'}_s$ priamok **e**, **f** leží na úbežnici u^α_s.
Stredový priemet rovnobežných priamok **e**, **f** sú rôznobežky e_s, f_s so spoločným úbežníkom $U^{l'}_s$.



S14

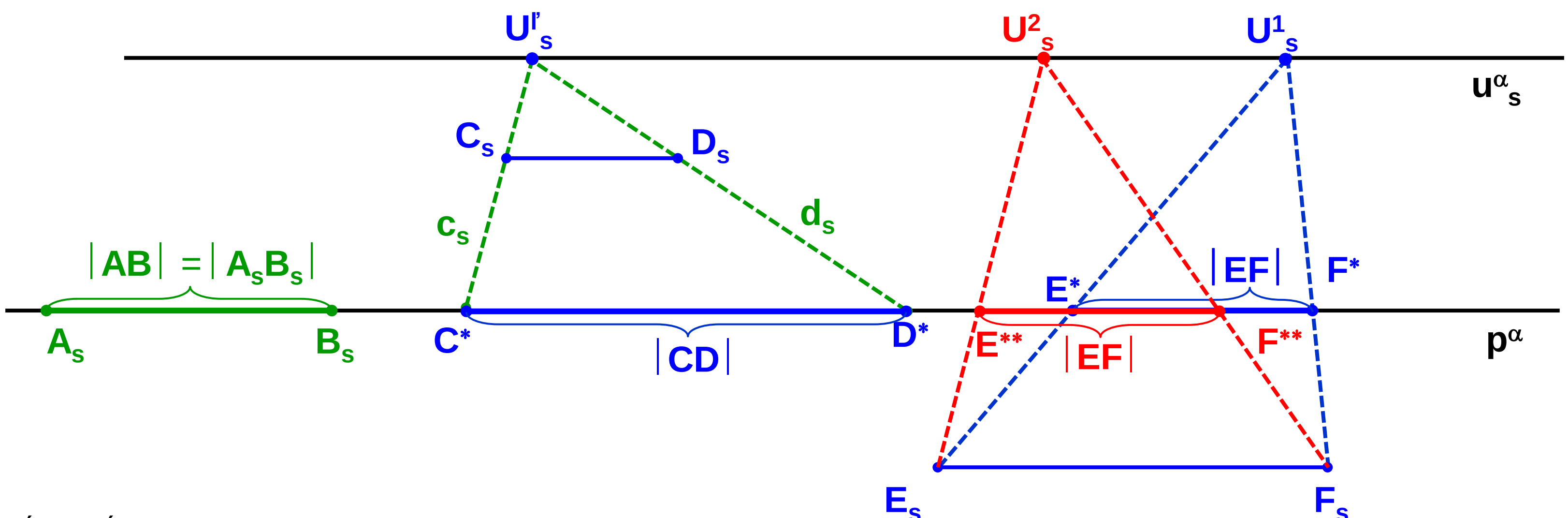
Rovina α je určená stopou $\mathbf{p}^{\alpha}$ a úbežnicou $\mathbf{u}^{\alpha}_{s}$. Určte dĺžky úsečiek **AB**, **CD** a **EF**, ktoré ležia v rovine α a sú rovnobežné s priemetňou.

Postup rysovania:

1) Úsečka **AB** leží v priemetni, preto platí $|AB| = |A_sB_s|$.

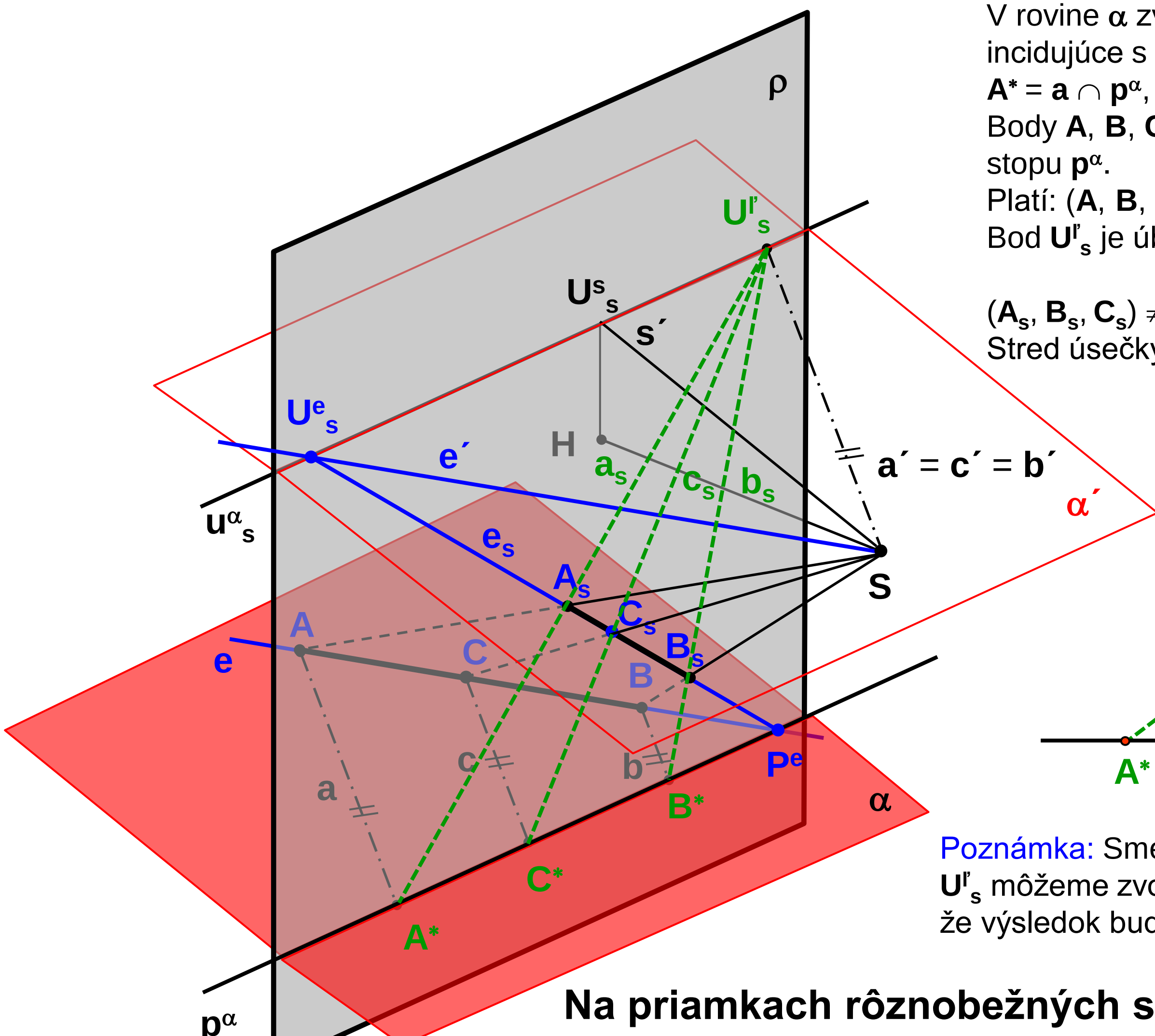
2) Úsečka **CD** leží v rovine α a je rovnobežná s priemetňou.
Jej dĺžku určíme pomocou ľubovoľných rovnobežných priamok **c** a **d**, ktoré incidujú s bodmi **C**, **D** a ležia v rovine α. Ich úbežník $\mathbf{U}^{I'}_{s}$ je ľubovoľný, vhodne zvolený bod na úbežnici $\mathbf{u}^{\alpha}_{s}$. Rovnobežné priamky **c**, **d** sa premietajú do rôznobežiek $\mathbf{c}_s$, $\mathbf{d}_s$.
$|CD| = |C^*D^*|$
Poznámka: Dĺžka úsečky $\mathbf{C_sD_s}$ je menšia ako dĺžka úsečky **CD**. Úsečka **CD** leží „za“ priemetňou.

3) Postup z bodu **2** zopakujeme pre úsečku **EF** dvakrát, pre dva rôzne ľubovoľné úbežníky $\mathbf{U}^{1}_{s}$ a $\mathbf{U}^{2}_{s}$. Presvedčte sa, že výsledok je rovnaký. $|EF| = |E^*F^*| = |E^{**}F^{**}|$
Poznámka: Dĺžka úsečky $\mathbf{E_sF_s}$ je väčšia ako dĺžka úsečky **EF**. Úsečka **EF** leží „pred“ priemetňou.



Mészárosová

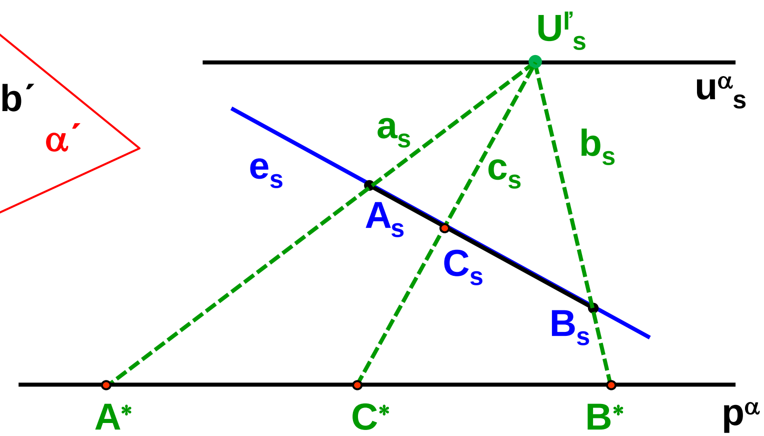
Delenie úsečky, ktorá leží v rovine α a je rôznobežná s priemetňou



Úsečka **AB** leží v rovine α. Bod **C** je stred úsečky **AB**.
Body **A**, **B**, **C** ležia na priamke **e**, ktorá je s priemetňou ρ rôznobežná. $\mathbf{e_s} = \mathbf{P^e U^e_s}$

V rovine α zvolíme ľubovoľné rovnobežné priamky **a**, **b**, **c** incidujúce s bodmi **A**, **B**, **C**.
$\mathbf{A^*} = \mathbf{a} \cap \mathbf{p^α}$, $\mathbf{B^*} = \mathbf{b} \cap \mathbf{p^α}$, $\mathbf{C^*} = \mathbf{c} \cap \mathbf{p^α}$.
Body **A**, **B**, **C** sme pomocou rovnobežiek **a**, **b**, **c** premietli na stopu $\mathbf{p^α}$.
Platí: (**A**, **B**, **C**) = (**A***, **B***, **C***).
Bod $\mathbf{U^{l'}_s}$ je úbežník priamok **a**, **b**, **c**.

$(\mathbf{A_s}, \mathbf{B_s}, \mathbf{C_s}) \neq (\mathbf{A^*}, \mathbf{B^*}, \mathbf{C^*})$
Stred úsečky **AB** sa nezobrazuje do stredu úsečky $\mathbf{A_sB_s}$.

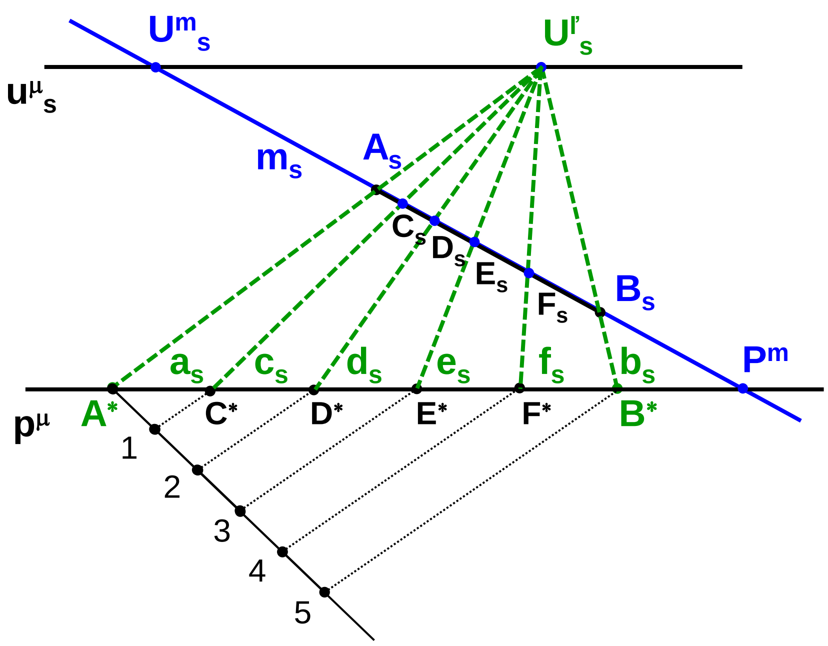


Poznámka: Smer priamok **a**, **b**, **c** je ľubovoľný, preto aj úbežník $\mathbf{U^{l'}_s}$ môžeme zvoliť na úbežnici $\mathbf{u^α_s}$ ľubovoľne. Presvedčte sa, že výsledok bude rovnaký ak zvolíte iný úbežník.

Na priamkach rôznobežných s priemetňou sa v stredovom premietaní nezachováva deliaci pomer bodov.

Daný je stredový priemet úsečky **AB**, ktorá leží na priamke **m** v rovine μ. Rovina μ je určená stopou a úbežnicou. Rozdeľte úsečku **AB** na 5 zhodných úsečiek.

S15a



Postup rysovania:

1) Na úbežnici $\mathbf{u^\mu_s}$ zvolíme ľubovoľný úbežník $\mathbf{U^{ľ}_s}$.

2) Narysujeme priamky $\mathbf{a_s = A_sU^{ľ}_s}$, $\mathbf{b_s = B_sU^{ľ}_s}$.
Priamky **a**, **b** sú navzájom rovnobežné.

3) $\mathbf{A^* = a_s \cap p^\mu}$
$\mathbf{B^* = b_s \cap p^\mu}$

4) Úsečku **A*B*** rozdelíme na 5 zhodných úsečiek.

5) Narysujeme priamky $\mathbf{c_s = C^*U^{ľ}_s}$, $\mathbf{d_s = D^*U^{ľ}_s}$,
$\mathbf{e_s = E^*U^{ľ}_s}$, $\mathbf{f_s = F^*U^{ľ}_s}$.

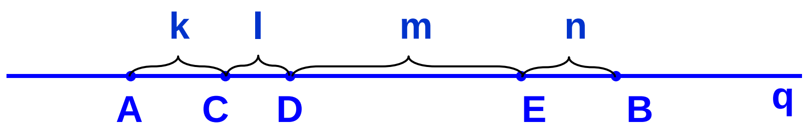
6) Určíme priesečníky $\mathbf{C_s = c_s \cap m_s}$, $\mathbf{D_s = d_s \cap m_s}$,
$\mathbf{E_s = e_s \cap m_s}$, $\mathbf{F_s = f_s \cap m_s}$.

7) $|\mathbf{AC}| = |\mathbf{CD}| = |\mathbf{DE}| = |\mathbf{EF}| = |\mathbf{FB}|$

Poznámka: $|\mathbf{A^*B^*}| \neq |\mathbf{AB}|$

Daná je úsečka **AB** s deliacimi bodmi **C**, **D** a **E**. Daný je stredový priemet úsečky **AB**, ktorá leží na priamke **q** v rovine μ. Rovina μ je určená stopou a úbežnicou. Zobrazte stredový priemet bodov **C**, **D** a **E**.

S15b



Postup rysovania:

1) Označíme dĺžky úsečiek
$|AC| = k$, $|CD| = l$, $|DE| = m$, $|EB| = n$.

2) Cez bod B_s zostrojíme hlavnú priamku h^{μ}_s roviny μ (pozri str. 2).

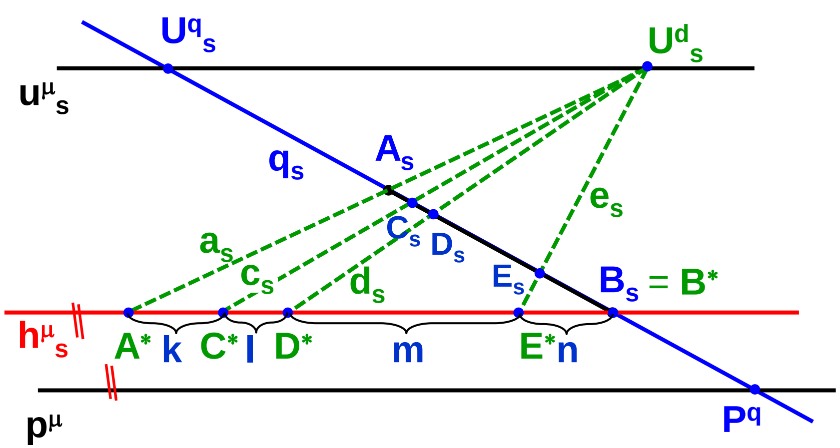
3) Na priamku h^{μ}_s nanesieme body B^*, E^*, D^*, C^*, A^* (v tomto poradí) tak, aby platilo:
$B_s = B^*$
$|A^*C^*| = k$, $|C^*D^*| = l$, $|D^*E^*| = m$, $|E^*B^*| = n$.

4) Narysujeme priamku $A^*A_s = a_s$.
Jej priesečník s úbežnicou u^{μ}_s označíme U^d_s.

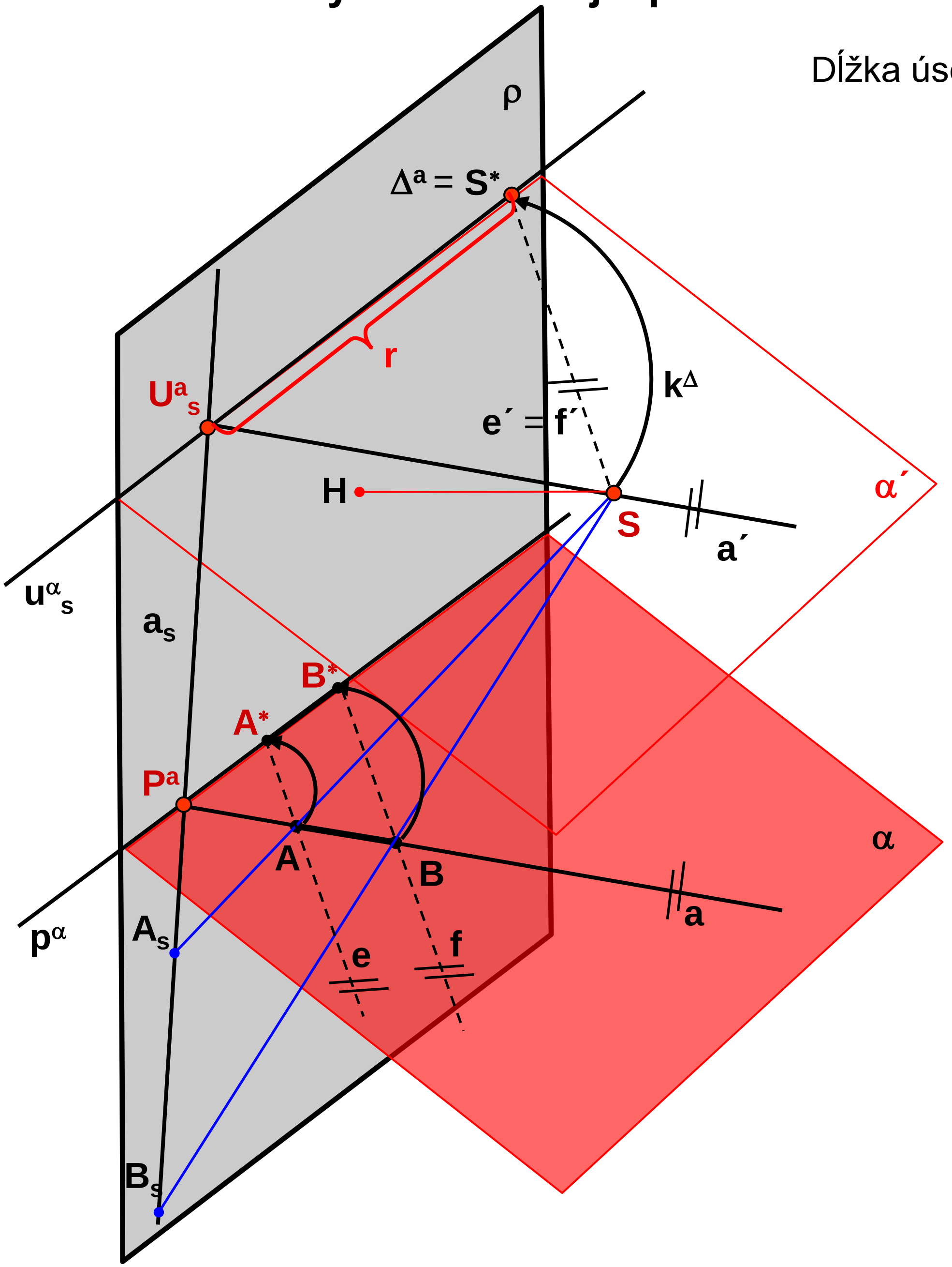
Poznámka: Ak by bol úbežník U^d_s nedostupný v nákresni, môžeme body A^*, B^*, C^*, D^*, E^* narysovať tak, aby platilo $|A^*C^*| = xk$, $|C^*D^*| = xl$, $|D^*E^*| = xm$, $|E^*B^*| = xn$ podľa potreby v x-násobnom zväčšení alebo zmenšení.

5) Narysujeme priamky $c_s = C^*U^d_s$, $d_s = D^*U^d_s$, $e_s = E^*U^d_s$.

6) Určíme priesečníky $C_s = c_s \cap q_s$, $D_s = d_s \cap q_s$, $E_s = e_s \cap q_s$.



Dĺžka úsečky rôznobežnej s priemetňou. Určenie meracieho bodu Δ^a.



Dĺžka úsečky **AB** sa nerovná dĺžke úsečky **A_sB_s**.

Úsečka **AB** leží v rovine α.
Priamku **a** = **AB** otočíme v rovine α okolo stopníka **P^a** do priemetne na stopu **p^α**. Body **A**, **B** sa pri otáčaní pohybujú po kružniciach so stredom v bode **P^a**.
Otočené body **A**, **B** označíme **A***, **B***.
Platí: $|AB| = |A^*B^*|$

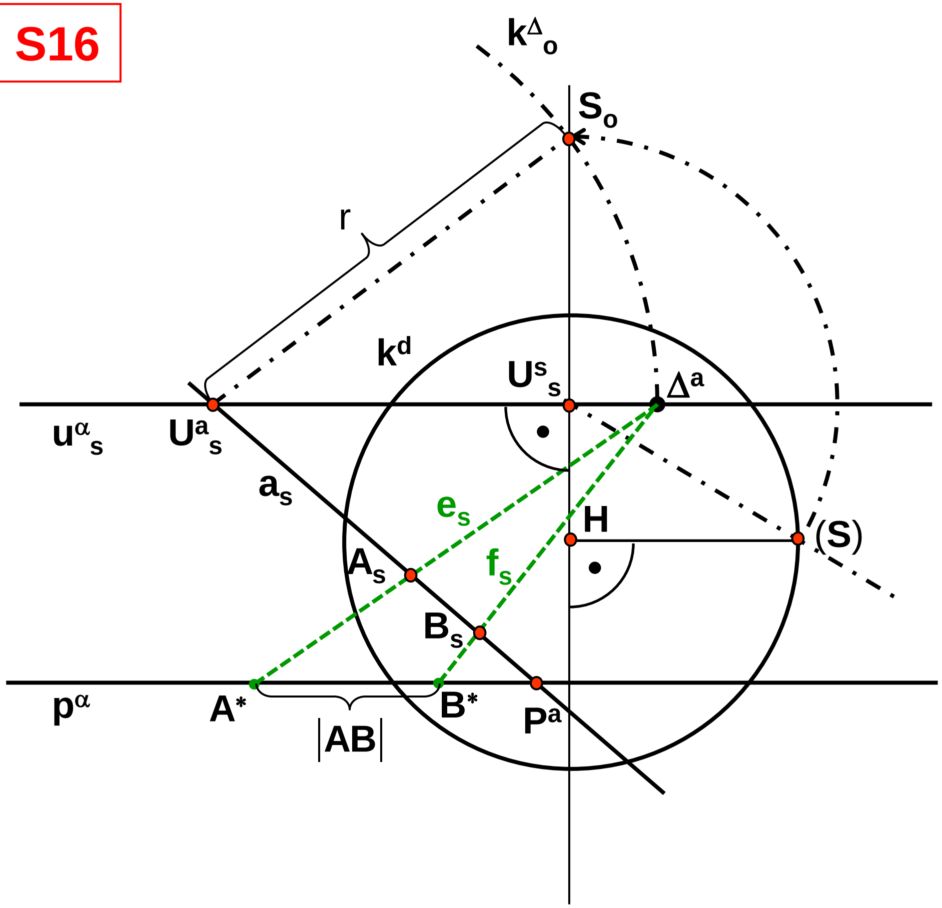
Smerová priamka **a´** leží v smerovej rovine $\alpha´$.
Priamku **a´** otočíme v rovine $\alpha´$ okolo úbežníka **U^a_s** na úbežnicu **u^α_s**. Bod **S** sa pri otáčaní pohybuje po kružnici **k^Δ** so stredom v bode **U^a_s**.
Otočený bod **S** označíme **S***.
Platí: $|U^a_sS| = |U^a_sS^*| = r$

Otočenie bodov **A**, **B**, **S** môžeme nahradiť rovnobežným priemetom v smere priamok **AA***, **BB***, **SS***. Bod **S*** je ich úbežník. Nazývame ho **merací bod** priamky **a** a označujeme ho Δ^a.
Kružnicu **k^Δ** nazývame **kružnica meracích bodov**, jej stred je úbežník **U^a_s** a polomer je **r**.

Poznámka: Merací bod Δ^a je merací bod všetkých priamok, ktoré sú s priamkou **a** rovnobežné.

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Daný je stredový priemet úsečky **AB**, ktorá leží na priamke **a** v rovine α. Rovina α je určená stopou a úbežnicou. Určte dĺžku úsečky **AB**. Použite merací bod priamky **a**.

S16



Postup rysovania:

1) Na určenie meracieho bodu použijeme otočenie roviny α' do priemetne:

Zostrojíme otočenú polohu bodu **S**.

Narysujeme otočenú polohu kružnice $\mathbf{k^{\Delta}}$.
Jej stred je v bode $\mathbf{U^a_s}$ a jej polomer **r** sa rovná dĺžke úsečky $\mathbf{U^a_s S_o}$.

Narysujeme merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ priamky **a**.
$\Delta^a = u^{\alpha}_s \cap k^{\Delta}_o$
Poznámka: Vyberieme jedno z dvoch riešení.

2) Merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ je úbežník rovnobežných priamok **e**, **f**. Narysujeme ich stredové priemety.
$e_s = \Delta^a A_s$
$f_s = \Delta^a B_s$

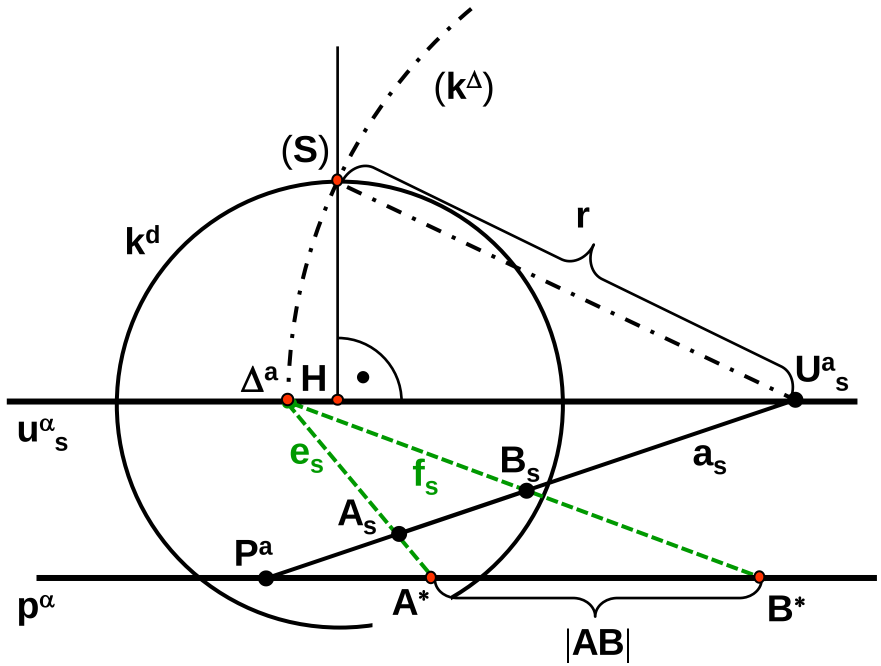
$A^* = e_s \cap p^{\alpha}$
$B^* = f_s \cap p^{\alpha}$

Body **A**, **B** sme rovnobežne premietli (v smere priamok **e**, **f**) na stopu $\mathbf{p^{\alpha}}$ do bodov **A***, **B***.

Platí: $|AB| = |A^*B^*|$

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, k^d. Daný je stredový priemet úsečky **AB**, ktorá leží v rovine α. Rovina α je určená stopou a úbežnicou. Určte dĺžku úsečky **AB**. Použite merací bod priamky **a**.

S17



Postup rysovania:

1) Narysujeme priamku $\mathbf{a_s} = \mathbf{A_sB_s}$, jej stopník a úbežník.

2) Rovina α je kolmá na priemetňu, preto na určenie meracieho bodu použijeme sklopenie roviny α' do priemetne:
Zostrojíme sklopenú polohu bodu **S**.

Narysujeme sklopenú polohu kružnice $\mathbf{k^\Delta}$.
Jej stred je v bode $\mathbf{U^a_s}$ a jej polomer **r** sa rovná dĺžke úsečky $\mathbf{U^a_s}$(**S**).

Narysujeme merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ priamky **a**.
$\Delta^a = u^\alpha_s \cap (k^\Delta)$
Poznámka: Vyberieme jedno z dvoch riešení.

3) Merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ je úbežník rovnobežných priamok **e**, **f**. Narysujeme ich stredové priemety.
$e_s = \Delta^a A_s$
$f_s = \Delta^a B_s$

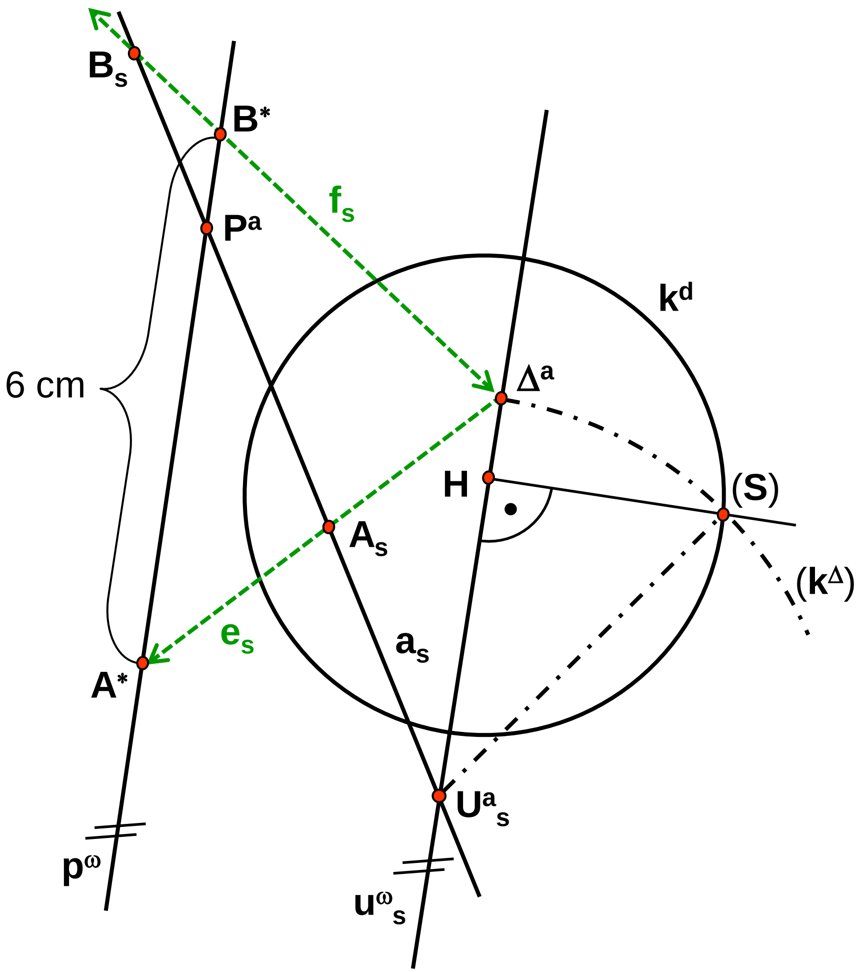
$A^* = e_s \cap p^\alpha$
$B^* = f_s \cap p^\alpha$
Body **A**, **B** sme rovnobežne premietli (v smere priamok **e**, **f**) na stopu $\mathbf{p^\alpha}$ do bodov **A***, **B***.

Platí: $|AB| = |A^*B^*|$

Mészárosová

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Daný je stredový priemet priamky **a** a bod **A** $\in$ **a**.
Na danú priamku **a** naneste od bodu **A** úsečku, ktorá má dĺžku 6 cm. Zobrazte jedno riešenie.

S18



Postup rysovania:

1) Vhodne zvolíme rovinu ω, ktorá inciduje s priamkou **a**, napríklad rovinu kolmú na priemetňu.

$\mathbf{u^\omega_s = HU^a_s}$

$\mathbf{p^\omega \parallel u^\omega_s \wedge P^a \in p^\omega}$

2) Rovina ω je kolmá na priemetňu, preto na určenie meracieho bodu použijeme sklopenie roviny ω' do priemetne:
Zostrojíme sklopenú polohu bodu **S**.
Narysujeme sklopenú polohu kružnice $\mathbf{k^\Delta}$.
Jej stred je v bode $\mathbf{U^a_s}$ a jej polomer sa rovná dĺžke úsečky $\mathbf{U^a_s(S)}$.
Narysujeme merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ priamky **a**.

$\mathbf{\Delta^a = u^\omega_s \cap (k^\Delta)}$

Poznámka: Vyberieme jedno z dvoch riešení.

3) Merací bod $\mathbf{\Delta^a}$ je úbežník rovnobežných priamok **e**, **f**. Narysujeme stredový priemet priamky **e**.

$\mathbf{e_s = \Delta^a A_s}$

$\mathbf{A^* = e_s \cap p^\omega}$

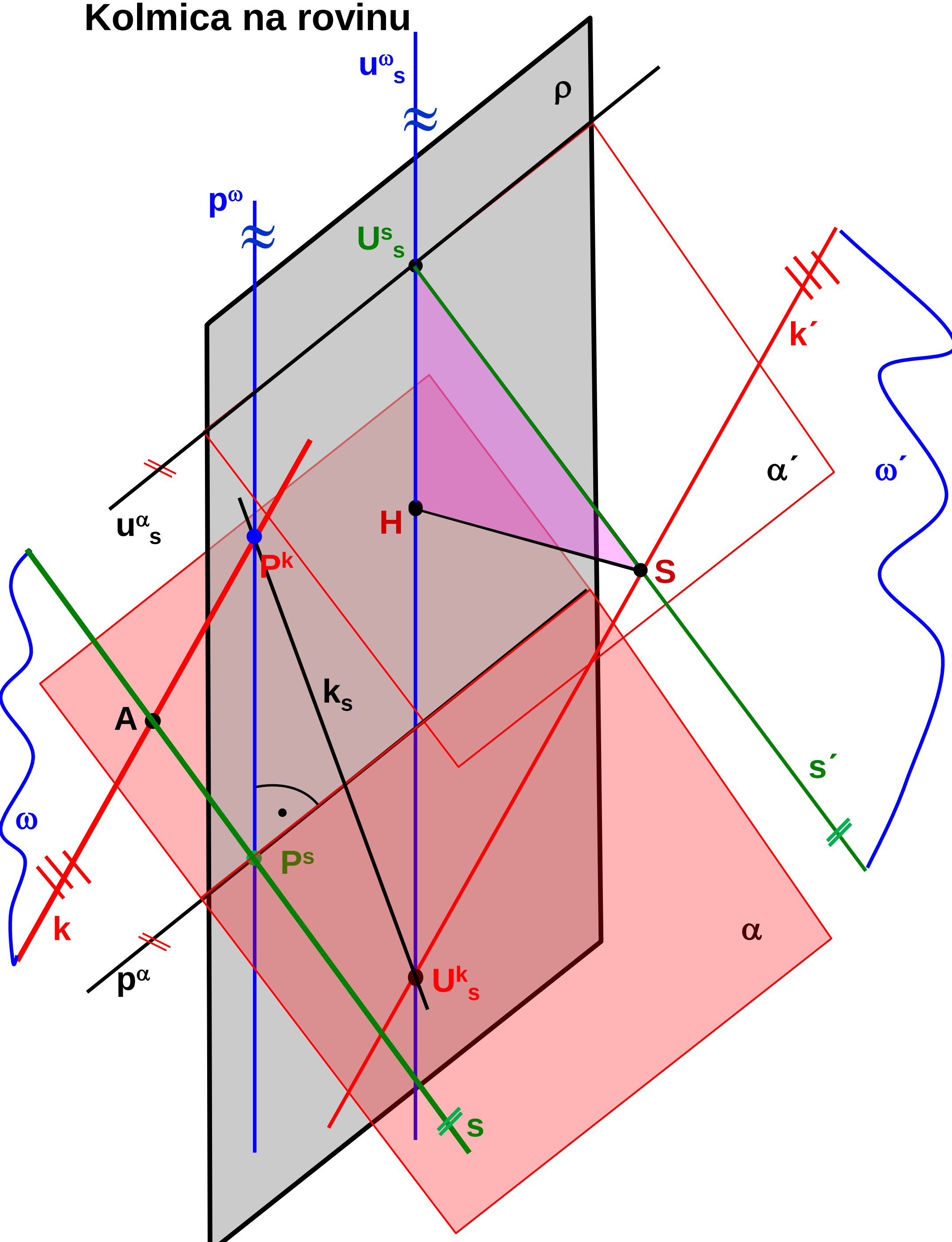
4) Narysujeme bod $\mathbf{B^*}$:

$\mathbf{B^* \in p^\omega \wedge |A^*B^*|}$ = 6 cm

$\mathbf{f_s = \Delta^a B^*}$

$\mathbf{B_s = f_s \cap a_s}$

Kolmica na rovinu



Nech je daná rovina α a bod $\mathbf{A} \in \alpha$.
Rovina α je vzhľadom na priemetňu vo všeobecnej polohe.

Bodom **A** zostrojíme spádovú priamku **s** roviny α a priamku **k**, ktorá je kolmá na rovinu α.
Platí $\mathbf{s} \perp \mathbf{k}$.
Priamky **s**, **k** určujú rovinu $\omega = (\mathbf{s}, \mathbf{k})$.
Rovina ω je kolmá na rovinu α aj na priemetňu ρ.
Stopa $\mathbf{p}^\omega$ roviny ω je kolmá na stopu $\mathbf{p}^\alpha$ roviny α.
$\mathbf{P}^s \in \mathbf{p}^\omega \wedge \mathbf{p}^\omega \perp \mathbf{p}^\alpha$
$\mathbf{P}^k = \mathbf{p}^\omega \cap \mathbf{k}$

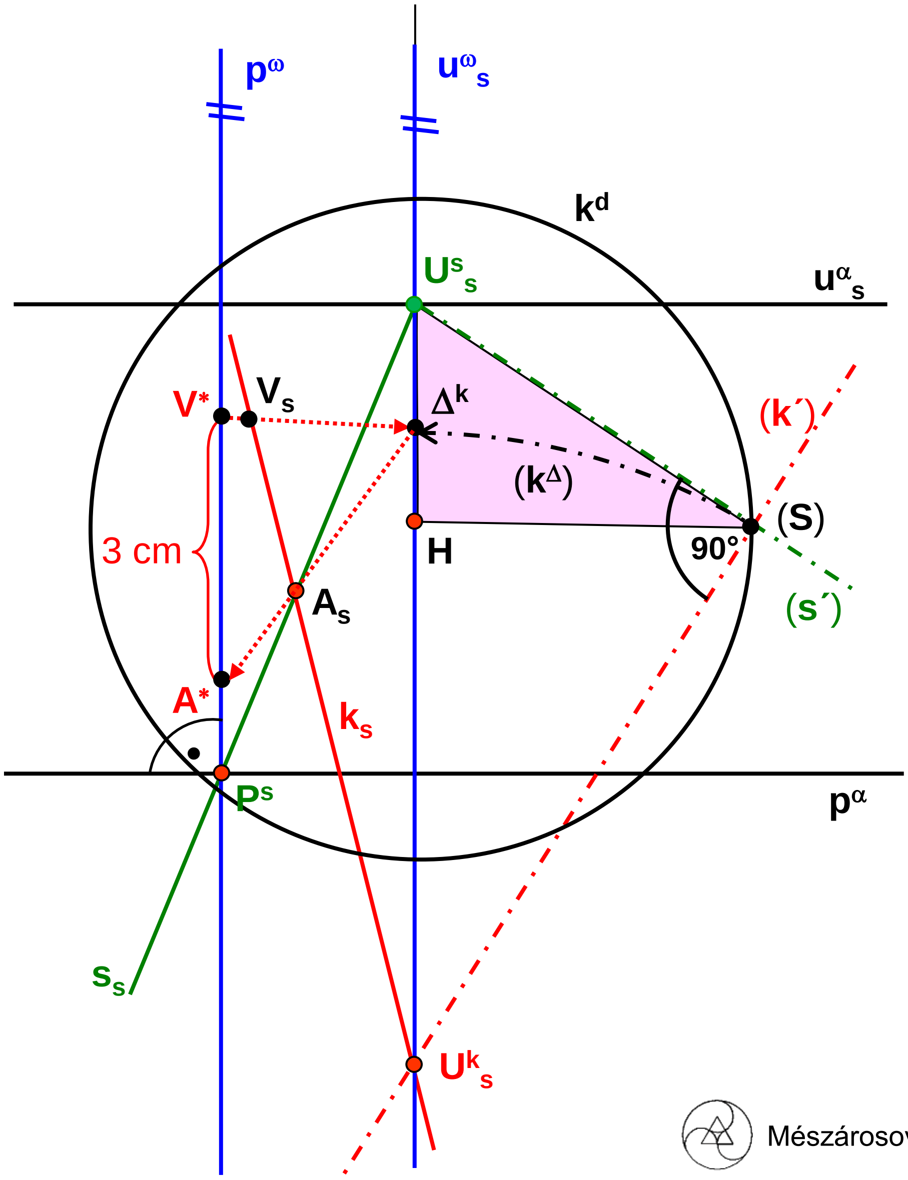
Smerové priamky **s´**, **k´** určujú rovinu $\omega´ = (\mathbf{s}´, \mathbf{k}´)$.
Platí $\mathbf{s}´ \perp \mathbf{k}´$.
$\mathbf{u}^\omega_s \parallel \mathbf{p}^\omega \wedge \mathbf{U}^s_s \in \mathbf{u}^\omega_s$
Poznámka: $\mathbf{H} \in \mathbf{u}^\omega_s$, lebo $\omega \perp \rho$.

$\mathbf{U}^k_s = \mathbf{u}^\omega_s \cap \mathbf{k}´$

$\mathbf{k}_s = \mathbf{P}^k\mathbf{U}^k_s$

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Rovina α je určená stopou $\mathbf{p^\alpha}$ a úbežnicou $\mathbf{u^\alpha_s}$.
Bodom **A** $\in \alpha$ zostrojte kolmicu na rovinu α a naneste na ňu úsečku dĺžky 3 cm.

S19a



Postup rysovania:

1) Bodom **A** zostrojíme spádovú priamku **s** roviny α a zobrazíme jej stopník $\mathbf{P^s}$.

2) Zobrazíme stopu a úbežnicu roviny ω, ktorá obsahuje priamku **s** a je kolmá na rovinu α, aj na priemetňu.

$\mathbf{P^s} \in \mathbf{p^\omega} \wedge \mathbf{p^\omega} \perp \mathbf{p^\alpha}$

$\mathbf{u^\omega_s} \parallel \mathbf{p^\omega} \wedge \mathbf{U^s_s} \in \mathbf{u^\omega_s}$

$\omega = (\mathbf{s}, \mathbf{k})$

$\omega' = (\mathbf{s'}, \mathbf{k'})$

3) Sklopíme rovinu ω' do priemetne.
V sklopenej polohe platí $(\mathbf{s'}) \perp (\mathbf{k'})$.

4) Zobrazíme úbežník kolmice **k**.
$\mathbf{U^k_s} = \mathbf{u^\omega_s} \cap (\mathbf{k'})$

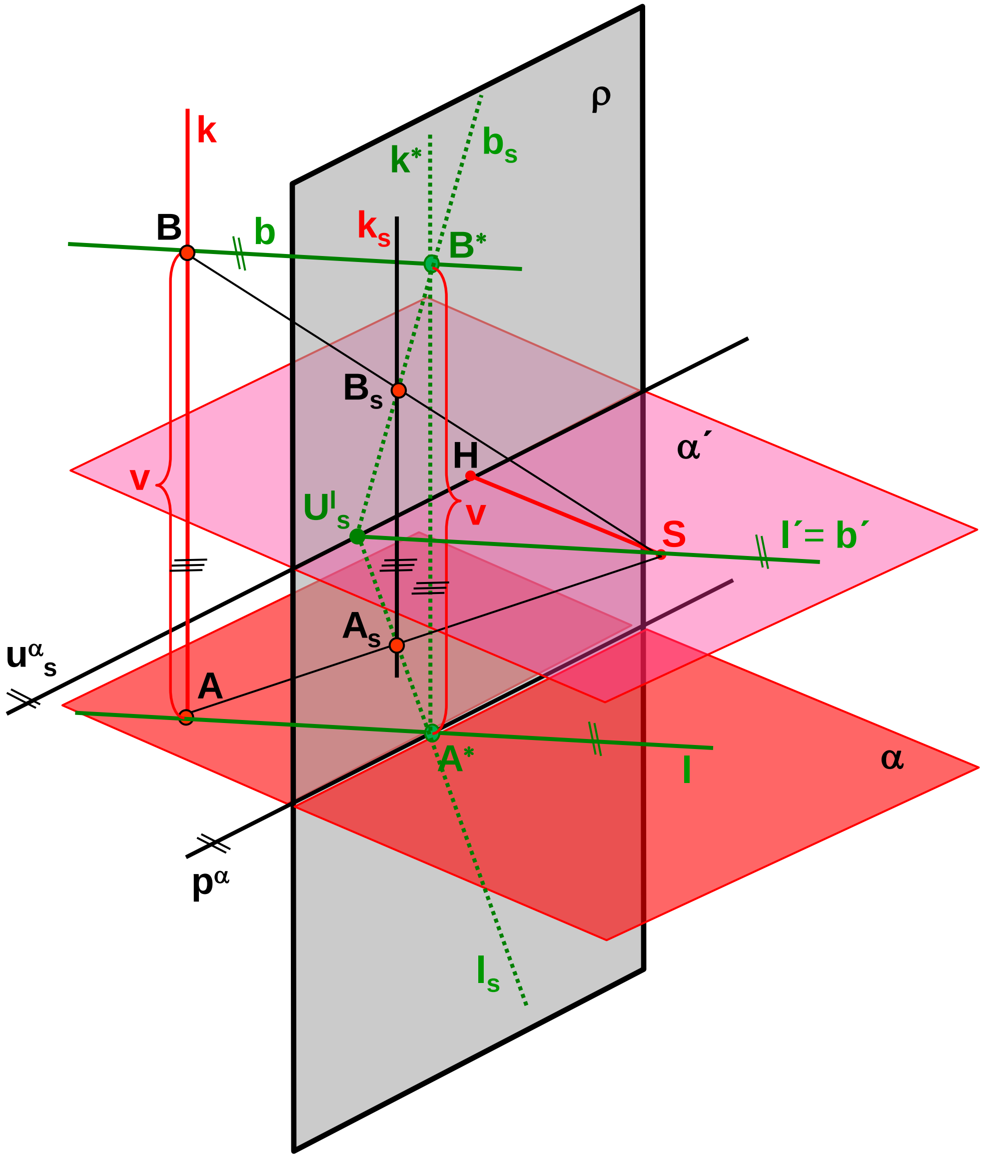
Poznámka: Bod $\mathbf{U^k_s}$ je úbežník všetkých priamok, ktoré sú kolmé na rovinu α.

5) Zostrojíme priamku $\mathbf{k_s} = \mathbf{A_s U^k_s}$.

6) Na priamku **k** nanesieme úsečku dĺžky 3 cm.
Použijeme merací bod Δ^k (postup pozri v príklade S18).
Zobrazíme jedno riešenie.

Mészárosová

Kolmica na rovinu



Nech je daná rovina α kolmá na priemetňu a bod **A** $\in \alpha$.

Bodom **A** zostrojíme priamku **k**, ktorá je kolmá na rovinu α.
Priamka **k** je rovnobežná s priemetňou, preto je jej úbežník nevlastný bod a **k** $\parallel$ $\mathbf{k_s}$.

Platí:
$\mathbf{k} \perp \alpha \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{p}^{\alpha} \wedge \mathbf{k} \parallel \mathbf{k_s} \Rightarrow \mathbf{k_s} \perp \mathbf{p}^{\alpha}$

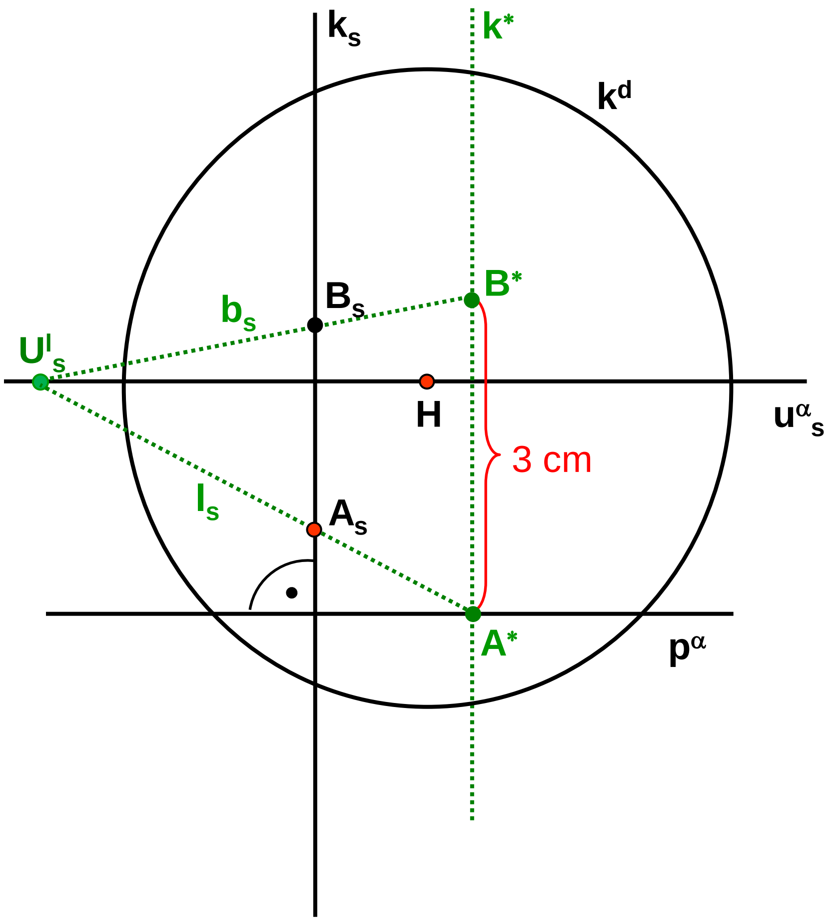
Nech je na priamke **k** daný bod **B**.

Dĺžku úsečky **AB** určíme jej posunutím v ľubovoľnom smere **l** do priemetne.
Posunuté body označíme **A***, **B*** a posunutú priamku **k** označíme **k***.
Platí: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A^*B^*}| = \mathbf{v}$.

Bod $\mathbf{U^l_s}$ je úbežník smeru posunutia.
$\mathbf{l} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{U^l_s}$ je úbežník priamok **l** a **b**.

Dané sú prvky vnútornej orientácie **H**, $\mathbf{k^d}$. Rovina α je určená stopou $\mathbf{p^\alpha}$ a úbežnicou $\mathbf{u^\alpha_s}$.
Bodom **A** $\in \alpha$ zostrojte kolmicu na rovinu α a naneste na ňu úsečku dĺžky 3 cm.

S19b



$\mathbf{H} \in \mathbf{u^\alpha_s} \Rightarrow$ rovina α je kolmá na priemetňu.

Postup rysovania:

1) Bodom **A** zostrojíme kolmicu **k** na rovinu α.
$\mathbf{k_s} \perp \mathbf{p^\alpha}$

2) Na úbežnici $\mathbf{u^\alpha_s}$ zvolíme ľubovoľný vhodný úbežník $\mathbf{U^I_s}$.

3) Narysujeme priamku $\mathbf{l_s} = \mathbf{U^I_s A_s}$ a jej priesečník so stopou $\mathbf{p^\alpha}$ označíme $\mathbf{A^*}$.

4) Bodom $\mathbf{A^*}$ narysujeme priamku $\mathbf{k^*} \perp \mathbf{p^\alpha}$.

5) Na priamku $\mathbf{k^*}$ nanesieme 3 cm (zvolíme jedno riešenie).
$|\mathbf{A^* B^*}| = 3$ cm

6) Narysujeme priamku $\mathbf{b_s} = \mathbf{B^* U^I_s}$ a jej priesečník s priamkou $\mathbf{k_s}$ označíme $\mathbf{B_s}$.

Platí: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A^*B^*}| = 3$ cm.

Poznámka: Porovnajte tento príklad s príkladom P3 v kapitole P2 Lineárna zvislá perspektíva.